WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 7

78. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

79. Sprawdzić istnienie następujących granic:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{4-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\sqrt{x}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}+x)$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(1-\sqrt{1+x})}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{[x]}}{2^x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(1+\sin x)$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$; k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{|2x-\pi|}$; l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{\ln(3-x)}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|^3}{x^3-x^2}$; n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x}$; o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[3e^x]+2}{3+[2e^x]}$.

80. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$.

81. Wiadomo, że $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-(Ax+B)\right)=1$. Czy można wyznaczyć A i B?

82. W oparciu o definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji pokazać, że funkcje $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ i $g(x)=\sqrt{|x|}$ są ciągłe na $\mathbb{R}$.

83. Funkcje $|f(x)|$ i $xg(x)$ są ciągłe na $\mathbb{R}$. Czy funkcje $f(x)$ i $g(x)$ muszą być ciągłe na $\mathbb{R}$?

84. Funkcja f jest ciągła w x_0 oraz $f(x_0)<0$. Pokazać, że istnieje liczba $\alpha>0$ taka, że $f(x)<0$ dla każdego $x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$.

85. Funkcja f jest ciągła na $[a,b]$ oraz $f(x)<0$ dla $x\in[a,b]$. Pokazać, że istnieje $\beta<0$ taka, że $f(x)<\beta$ dla każdego $x\in[a,b]$.

86. Niech $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}} & \text{dla} \quad x\neq 0; \\ A & \text{dla} \quad x=0. \end{cases}$ Czy istnieje takie A, dla którego f jest ciągła na $\mathbb{R}$?

87. Funkcja $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ jest wszędzie ciągła. Wiadomo, że $f(x)=x^2+1$ dla $x\in\mathbb{Q}$. Czy można wyznaczyć $f(\sqrt{2})$?

88. Dla $x\in(0,1)$ określmy za Riemannem funkcję $r(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\notin\mathbb{Q}; \\ \frac{1}{q} & \text{dla} \quad x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, \ \ \mathrm{NWD}(p,q)=1. \end{cases}$
Pokazać, że $r(X)$ jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nieciągła w każdym punkcie wymiernym.

89. Funkcja $f:[0,1]\mapsto[0,1]$ jest ciągła. Pokazać, że istnieje punkt $\xi\in[0,1]$ taki, że $f(\xi)=\xi$ (taki punkt nazywamy *punktem stałym* funkcji f). Czy funkcja ciągła f musi mieć punkt stały, jeśli:

a) $f:[0,1]\mapsto[0,2]$; b) $f:[0,1]\mapsto[1,2]$?

90. Pokazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na półprostej $[0,\infty)$ i ma skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, to f jest ograniczona na $[0,\infty)$.