

WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 8

91. Czy równanie $4^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} + 2^x + 1$ ma dodatnie pierwiastki?
92. Czy równania $x \ln x = 2$ i $x^8(1 - x^5) = 1$ mają rozwiązania w \mathbb{R} ?
93. Pokazać, że funkcja monotoniczna na (a, b) , mająca na tym przedziale własność Darboux jest na (a, b) ciągła.
94. Z badać ciągłość jednostajną funkcji na podanym zbiorze I :
- a) $h(x) = \sin x^2$, i) $I = [0, 7\pi]$, ii) $I = \mathbb{R}$;
b) $u(x) = \ln x$, i) $I = (0, 1]$ ii) $I = [1, \infty)$
95. Wykazać, że suma funkcji ciągłych jednostajnie na I jest funkcją ciągłą jednostajnie na I . Czy twierdzenie takie jest prawdziwe dla iloczynu? Rozpatrzyć przypadki:
- a) I domknięty i ograniczony;
b) $I = \mathbb{R}$.
96. Funkcja f jest ciągła na półprostej $[a, \infty)$ i ma skończoną granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Czy f jest ciągła jednostajnie na $[a, \infty)$?
97. Czy funkcja ciągła na (a, b) i ograniczona na tym odcinku musi być na nim ciągła jednostajnie?
98. Funkcja f jest ciągła na (a, b) i ma skończone granice $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Czy f jest jednostajnie ciągła na (a, b) ?
99. Z badać istnienie pochodnej (pochodnych jednostronnych) w podanych przypadkach:
- a) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$;
b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$;
c) $h(x) = \sqrt{\sin x^2}$, $x_0 = 0$;
d) $u_k(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, $k = 1, 2$.
100. Funkcja f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a i jest ciągła w a . Czy funkcja $g(x) = (x - a)f(x)$ ma pochodną w a ? Czy istnieje pochodna w punkcie a funkcji $h(x) = \sqrt[3]{x - a}f(x)$?
101. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a . Czy istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(f(a + \frac{1}{n}) - f(a))]$? Czy istnienie tej granicy zapewnia istnienie $f'(a)$?
102. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, która ma pochodną w punktach $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ oraz jest nieciągła w pozostałych punktach.
103. Znaleźć $f'(x)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ dla funkcji $f(x) = [x] \sin \pi x$ oraz $f(x) = \sin \pi(x - [x])$.
104. Obliczyć pochodne (tam gdzie istnieją) następujących funkcji:
- a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$; b) $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; c) $h(x) = 2^{-\sin(3x^3+3)}$; d) $u(x) = \log_x 3$;
e) $v(x) = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$; f) $u(x) = \arctg \frac{1 - x}{1 + x}$; g) $z(x) = \log_{2x}(2^x + x^2)$; h) $w(x) = x^{\sqrt{x}}$.
105. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:
- a) $(f^{-1})'(3)$ jeśli $f(x) = x^5 + x + 1$; b) $(g^{-1})'(e + 1)$ jeśli $g(x) = x + \ln x$;
c) $(h^{-1})'(1)$ jeśli $h(x) = \cos x - 3x$; d) $(u^{-1})'(x)$ jeśli $u(x) = \arctg 3x$.