WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 9

106. Pokazać, że funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$ ma w każdym otoczeniu punktu $x = 0$ punkty, w których nie jest różniczkowalna, ale jest różniczkowalna w $x = 0$.

107. Wyznaczyć pochodne rzędu n dla funkcji:

a) $f(x) = \cos x$; b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$; c) $f(x) = \sin^2 x$; d) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{2+x}$.

108. Pokazać, że prawdziwe są tożsamości:

a) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ dla $x \in (-1, \infty)$; b) $2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sign} x$ dla $|x| > 1$.

109. Wykazać, że jeżeli funkcja f ma na przedziale (a, b) ograniczoną pochodną, to f jest jednostajnie ciągła na (a, b).

110. Wykazać prawdziwość następujących nierówności na wskazanych zbiorach:

a) $2x \operatorname{arc\,tg} x \geqslant \ln(1+x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

b) $\ln(1+x) > \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}$ dla $x > 0$;

c) $2\ln x < x - \frac{1}{x}$ dla $x > 1$;

d) $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} \leqslant \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \leqslant \dfrac{x-y}{\cos^2 x}$; dla $0 < y \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$;

e) $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$ dla $x \geqslant 0$, $\alpha \in (0, 1)$;

f) $\dfrac{2}{1+2x} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ dla $0 < x < \infty$;

g) $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ dla $x > 0$.

111. Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi, dla których mamy $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$. Pokazać, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ma co najmniej jeden pierwiastek między 0 i 1.

112. Funkcja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) oraz $f(a) = f(b)$. Pokazać, że istnieją takie punkty $\xi, \eta \in (a, b)$, $\xi \neq \eta$, że $f'(\xi) + f'(\eta) = 0$.

113. Znaleźć najmniejszą liczbę λ taką, aby dla dowolnych $x, y \in [1, 3]$ zachodziła nierówność

$$|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leqslant \lambda|x - y|.$$

114. Dla różniczkowalnych funkcji f i g nie istnieje x, dla którego $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$. Pokazać, że funkcje f i g mają następującą własność: Między każdymi dwoma pierwiastkami równania $f(x) = 0$ znajduje się pierwiastek równania $g(x) = 0$.

115. Niech f będzie funkcją ciągłą dla $x \geqslant 0$ oraz różniczkowalną dla $x > 0$. Załóżmy, że $f(0) = 0$ i f' jest funkcją rosnącą. Pokazać, że $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ jest rosnąca dla $x > 0$.

116. Udowodnić następujące nierówności:

a) $\sqrt[n]{x+1} > 1 + \dfrac{x}{n} - \dfrac{n-1}{2n^2}x^2$ dla $x > 0$ i $n \geqslant 2$, b) $\operatorname{ctg} x > \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^3$ dla $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

117. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ w punkcie $x_0 = 1$ z resztą R_3. Oszacować błąd przybliżenia tej funkcji wielomianem Taylora stopnia 2 jeśli $|x - 1| < 0,1$.

118. Oszacować błąd przybliżenia

$$\ln\frac{x}{x-1} \approx \ln 2 - \frac{x-2}{2} + \frac{3}{8}(x-2)^2$$

dla $|x - 2| \leqslant \frac{1}{5}$.