1. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^{n/2}}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}.$$

   Sformułuj użyte kryterium zbieżności.

2. Znajdź rozwinięcie funkcji f w szereg Maclaurina, gdzie

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x}{x^3+2}, \quad \text{(b) } f(x) = 2x\sin(3x^2).$$

   Jaki jest promień zbieżności otrzymanego szeregu?

3. Używając znanego rozwinięcia w szereg Maclaurina, oblicz

$$\text{(a) } \sin(0,1) \quad \text{(b) } e^{0,2},$$

   z dokładnością 10^{-6}.

4. Znajdź
   (a) równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,
   (b) pochodną kierunkową $D_u f(x_0, y_0)$, gdzie $u = (-1, 2)$,
   (c) gradient $\nabla f(x_0, y_0)$;

   gdzie

$$f(x,y) = \frac{y^2\cos(x-y)}{\ln(1+2x)}, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$$

5. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze $[0,2]^2$, gdzie

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

6. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji
   (a) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}$,
   (b) $f(x,y) = xy + \frac{1}{2(x+y)}$,
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$.

7. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$x = 0, \quad 2x + 2y = 3, \quad y = x^3 2^{x^2-2}.$$

8. Obliczyć całki podwójne
   (a) $\iint_D \frac{1}{(x+y+2)^2}\,dx\,dy, \quad D = [0,1]\times[0,2];$
   (b) $\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy, \quad D = [0, \frac{\pi}{2}]^2;$

(c) $\iint_D x^2 y\, dx\, dy$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym prostymi $y = x + 2$, $x + y = 1$, $x = 4$;

(d) $\iint_D \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x^2 + y^2 = 2$, $x + y = 2$, $y - x = 2$;

(e) $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} x^2\, dx\, dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x^2 + y^2 = 1$, $x = |y|$.

9. Obliczyć objętość obszaru $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} + 3\}$.

10. Obliczyć całki

$$\iiint_D z\, dx\, dy\, dz, \qquad \iiint_D x^2\, dx\, dy\, dz,$$

gdzie D jest wycinkiem kuli zadanym nierównościami $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ oraz $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. Znaleźć transformaty Laplace'a funkcji

$$f_1(t) = e^{-t}, \quad f_2(t) = (t + 1)^2, \quad f_3(t) = \sin(3t), \quad f_4(t) = \begin{cases} t, & \text{gdy } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{gdy } t > 1. \end{cases}$$

12. Znaleźć transformaty Fouriera funkcji

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & \text{gdy } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{gdy } |t| > 1, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \in [3, 4], \\ 0, & \text{dla pozostałych } t, \end{cases} \quad f_3(t) = e^{-2|t|}.$$

13. Używając transformacji Laplace'a rozwiązać równanie różniczkowe

$$f'(t) + 2f(t) = \sin 3t,$$

z warunkiem początkowym $f(0) = 1$.

14. Używając transformacji Laplace'a rozwiązać równanie różniczkowe

$$f''(t) + 5f'(t) + 4f(t) = e^{-t},$$

z warunkami początkowymi $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

15. Używając transformacji Laplace'a rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.