

Imię i nazwisko:

numer indeksu:

Powodzenia!

1. Znajdź rozwinięcie Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 3}$. Jaki jest promień zbieżności otrzymanego szeregu?

2. Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

3. Znajdź gradient $\nabla f(x, y)$ funkcji f określonej wzorem

$$f(x, y) = \frac{x \cos^3(y + x)}{y + 1}.$$

4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}.$$

5. Znajdź transformatę Fouriera funkcji f , gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dla } x \in [0, \pi], \\ 0, & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (\pi, \infty). \end{cases}$$

6. Znajdź transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = (t + 2)^2 e^{5t}$.

B7. Używając transformacji Laplace'a rozwiąż równanie różniczkowe

$$f'(t) + 3f(t) = \sin(2t),$$

z warunkiem początkowym $f(0) = 2$.

B8. Oblicz całkę podwójną

$$\iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

gdzie D jest kołem o środku w $(0, 0)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.

Transformaty Laplace'a ważniejszych funkcji, własności

funkcja	transformata	funkcja	transformata
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$af(t) + bg(t)$	$a\mathcal{L}f(s) + b\mathcal{L}g(s)$
$e^{at} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2 + \beta^2}$	$f(\delta t)$	$\frac{1}{s} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{\delta}\right)$
$e^{at} \cos(\beta t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \beta^2}$	$f'(t)$	$s\mathcal{L}f(s) - f(0+)$
		$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}f(s) - sf(0+) - f'(0+)$

Uwaga: we wzorach w tabelce $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \delta > 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.