Funkcje analityczne **Lista 1**

1. Znajdź część rzeczywistą, urojoną i moduł liczby $\frac{1+2i}{3+4i}$.

Funkcję *wykładniczą* exp określamy następująco

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definicja ta jest poprawna, tj. powyższy szereg potęgowy jest zbieżny na $\mathbb{C}$. Następnie definiujemy funkcje *trygonometryczne* wzorami

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na wykładzie udowodnimy, że $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ dla dowolnych z, $w \in \mathbb{C}$. Następne zadania należy rozwiązać korzystając (tylko) z tego wzoru, z definicji funkcji exp, cos, sin i poprzednich zadań.

2. Zauważ, że funkcje exp, sin i cos są holomorficzne na $\mathbb{C}$ i oblicz ich pochodne.

3. Obcięcie funkcji exp do $\mathbb{R}$ jest funkcją dodatnią i ściśle rosnącą.

4. Korzystając ze wzoru $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ wyprowadź wzór na $\cos(z + w)$ oraz $\sin(z + w)$. Uzasadnij, że $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

5. Uzasadnij, że obcięcia funkcji sin i cos do $\mathbb{R}$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych. Sprawdź, że $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 0$ i wywnioskuj stąd, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia t_0, dla której $\cos t_0 = 0$. **Definicja:** $\pi = 2t_0$**.**

6. Uzasadnij, że funkcje sin i cos są monotoniczne i dodatnie na $(0, \pi/2)$. Oblicz ich wartości w punktach 0, $\pi/2$, π, 2π. Uzasadnij, że funkcje sin i cos są 2π-okresowe, a funkcja exp jest $2\pi i$-okresowa.

7. Odwzorowanie $t \mapsto \exp(it)$ przekształca $\mathbb{R}$ *na* okrąg jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

8. $\exp(z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z/(2\pi i) \in \mathbb{Z}$.

9. Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ mamy $\exp(z) \neq 0$. Jeśli $w \in \mathbb{C}$ i $w \neq 0$, to $w = \exp(z)$ dla pewnej liczby $z \in \mathbb{C}$.

10. (Postać trygonometryczna liczb zespolonych) Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ istnieje liczba $t \in [0, 2\pi)$ taka, że

    $$z = |z|\exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t).$$

    Dla liczb $z \neq 0$ liczba t jest wyznaczona jednoznacznie, nazywamy ją *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $t = \operatorname{Arg} z$.

11. Oblicz $\cos i$, $\sin i$, $\cos(i + \pi/2)$; oblicz wartości funkcji sin i cos w punktach $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/4$.

---

12. Każda homografia, tj. funkcja postaci $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$, jest złożeniem odwzorowań postaci $g(z) = 1/z$ oraz $h(z) = Az + B$.

13. Zbadaj zbieżność ciągów

$$a_n = \frac{e^{in}}{n}, \quad b_n = \frac{2^n}{n^2} + \frac{i\cos n\pi}{n^3}, \quad c_n = \exp(-\frac{i}{n^2+1}), \quad d_n = z^n, \quad f_n = \frac{in+n^2}{n^2-i}.$$

Wsk. $|d_{n+1} - d_n| = \ldots$.

14. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n+2}{n^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i\,, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}, \text{ gdzie } z < 1.$$

15. Znajdź wszystkie $z \in \mathbb{C}$, dla których zbieżny jest szereg

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n z^n}{n!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n^2}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

16. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ są bezwzględnie zbieżne.

17. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest też bezwzględnie zbieżny.

18. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n}$ jest też bezwzględnie zbieżny.

19. Oblicz sumy szeregów

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^{2n}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{2^n}.$$

20. Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, to jest ona równa promieniowi zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$.

21. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z-2)^n, \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}, \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n,$$

$$\text{(f)} \sum_{n=0}^{8} n! z^n, \quad \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}, \quad \text{(h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}, \quad \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}.$$

22. Zbadaj zachowanie szeregów z zadania 21(a), (b), (g), (h), (i) na brzegach ich kół zbieżności.

---

23. Wykaż, że funkcje Re, Im, $|\cdot|$, $z \mapsto \overline{z}$ są ciągłe na $\mathbb{C}$.

24. Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b) (co oznacza, że ciągłe i różniczkowalne są funkcje $\operatorname{Re} f$ oraz $\operatorname{Im} f$; $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$). Udowodnij, że

$$|f(b) - f(a)| \le |b-a| \sup_{t\in(a,b)} |f'(t)|.$$

(Wsk. wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f(b) - f(a)$ jest rzeczywiste – dlaczego?) Pokaż na przykładzie, że na ogół nie istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Porównaj z twierdzeniem Lagrange'a.