Funkcje analityczne **Lista 2**

25. Rozwiń w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ funkcję f, gdzie

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{1-iz} \text{ oraz } p=0, \quad \text{(b) } f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=i, \quad \text{(c) } f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=2.$$

Jakie są promienie zbieżności otrzymanych szeregów?

26. Uzasadnij, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3}$ jest zbieżny jednostajnie na $\overline{D(0,1)}$.

Przypomnienie: Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych rozłącznych zbiorów otwartych $G_1, G_2 \subset X$ takich, że $A \subset G_1 \cup G_2$ zachodzi $A \cap G_1 = \emptyset$ lub $A \cap G_2 = \emptyset$. Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $G \subset Y$ zbiór $f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$ jest otwarty w X.

27. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest zbiorem spójnym.

28. ♡ Zbiór otwarty $G \subset \mathbb{C}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną zawartą w G.

---

29. Sprawdź, czy funkcje (a) $f(z) = \sin z$, (b) $f(z) = \overline{z}$ spełniają równania Cauchy-Riemanna.

30. Oblicz pochodne (wszędzie tam gdzie istnieją) funkcji: (a) $f(z) = \overline{z}^2 - z$, (b) $f(z) = |z|^2$, (c) $f(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$; (d) $f(z) = \exp(\frac{1}{\sin z})$.

31. Jeśli $f \in C^2(\Omega)$ (jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych) oraz $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}$.

32. Funkcję f nazywamy harmoniczną na zbiorze Ω, jeśli $\Delta f = 0$ na Ω. Wykaż, że funkcja holomorficzna na Ω, a także jej części rzeczywista i urojona są harmoniczne na Ω.

33. Wyraź $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$ oraz $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ przez $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

34. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem (tj. zbiorem otwartym i spójnym), $f \in H(\Omega)$ i jedna z dwóch funkcji $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ jest stała na Ω, to f jest funkcją stałą.

35. Jeśli $f \in H(\Omega)$, to $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest holomorficzna na $\overline{\Omega} = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$.

---

36. Jeśli $F \in H(\Omega)$ i $f = F' \in C(\Omega)$, a γ jest drogą w Ω o początku w a i końcu w b, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

37. Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f' = 0$ na Ω, to f jest stała na każdej składowej spójności zbioru Ω.

38. Niech γ będzie drogą w $\mathbb{C}$ o początku w a i końcu w b. Oblicz $\int_\gamma z^n\,dz$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

39. Oblicz $\int_\gamma ze^{iz}\, dz$, gdzie $\gamma(t) = 2e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$.

40. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Oblicz całkę $\int_\gamma (z-a)^n\, dz$, jeśli γ

    (a) jest półokręgiem $|z-a| = r$, $0 \leq \arg(z-a) \leq \pi$ o początku w $a+r$;

    (b) jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu r;

    (c) jest brzegiem kwadratu o środku w a i bokach równoległych do osi układu współrzędnych ($n \neq -1$).

41. Oblicz całkę $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-4}$, gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 1 i promieniu 2. *Wskazówka*: rozkład na ułamki proste.

42. Niech f będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{C}$. Oblicz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz,$$

gdzie γ_ε jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu ε.

43. Sformułuj i udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki wzdłuż drogi.

44. Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ będą drogami zamkniętymi, niech $w \in \mathbb{C}$ oraz

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |w - \gamma_2(t)|, \quad \text{dla } t \in [0,1].$$

    (a) Pokaż, że wzór $\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_2(t) - w}$ określa drogę zamkniętą w $\mathbb{C}$.

    (b) Sprawdź, że $|1 - \gamma(t)| < 1$ i wywnioskuj stąd, ile równa się $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

    (c) Obliczając z definicji $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ wywnioskuj, że $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(w)$.

45. (Funkcje holomorficzne o niezerowej pochodnej zachowują kąty) Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \Omega$ będą drogami klasy C^1, niech $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\Omega)$ ma niezerową pochodną na Ω, to $f \circ \gamma_k$ są drogami w Ω. Ponadto kąt pomiędzy drogami γ_1^* i γ_2^* w punkcie $\gamma_1(t_0)$ jest taki sam, jak pomiędzy drogami $(f \circ \gamma_1)^*$ i $(f \circ \gamma_2)^*$ w punkcie $f \circ \gamma_1(t_0)$. *Wskazówka.* Znaleźć wektory styczne do tych dróg.

---

46. Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$. Dla $z \in \Omega$ określamy funkcję Log następująco

$$\mathrm{Log}\, z = \int_{\langle 1, z \rangle} \frac{dw}{w}.$$

Sprawdź, że $\mathrm{Log} \in H(\Omega)$ i oblicz pochodną Log'. Uzasadnij, że $\exp(\mathrm{Log}\, z) = z$, obliczając pochodną funkcji $g(z) = \exp(\mathrm{Log}\, z)/z$. Oblicz $\mathrm{Log}(1+i)$, $\mathrm{Log}(\exp(3\pi i/2))$. Czy $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$?
Uwaga: Liczbę $\mathrm{Log}\, z$ nazywamy *logarytmem głównym* z.

47. Oblicz całki

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z\, dz}{(1+z^2)\sin z}, \quad \int_\gamma \frac{\sin(z-2)\, dz}{z-2},$$

gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w $2+i$ i promieniu $\sqrt{2}$.