Funkcje analityczne **Lista 3**

48. Niech $p, z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{p\})$. Niech $C(z,r)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w z i promieniu r. Uzasadnij, że $\int_{C(p,r)} f(z)\,dz$ nie zależy od r, oraz że
$$\int_{C(z_0,r)} f(z)\,dz = \mathrm{Ind}_{C(z_0,r)}(p) \cdot \int_{C(p,r)} f(z)\,dz, \quad \text{dla } r \neq |z_0 - p|.$$

49. Obliczając $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ dla (odpowiednio sparametryzowanej) drogi zamkniętej γ, której obraz jest elipsą $\frac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{Im}\,z)^2}{b^2} = 1$, uzasadnij, że
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

50. Uzasadnij, że dla $\xi \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór
$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$
Wskazówka. Można całkować $f(z) = e^{i\xi z - z^2}$ po brzegu prostokąta o wierzchołkach w punktach $\pm R$, $\pm R + ai$ dla odpowiednio dobranego a, następnie wziąć $R \to \infty$.

51. (*Lemat Jordana*) Niech $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \mathrm{Im}\,z \geq \alpha\}$, $f \in C(D)$ oraz $f(z) \to 0$, gdy $|z| \to \infty$. Wówczas
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} e^{i\beta z} f(z)\,dz = 0,$$
gdzie γ_r jest tą częścią okręgu o środku w 0 i promieniu r, która znajduje się w D.

52. Oblicz całki
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2i)}\,dz; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z-2i)^3}\,dz,$$
gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem (a) o środku w $3i$ i promieniu 2; (b) o środku w $-2i$ i promieniu 3.

53. Jeśli $f_n \in H(\Omega)$ jest ciągiem funkcji zbieżnym do funkcji f jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze zbioru Ω, to $f \in H(\Omega)$.

54. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, $f \in C([a,b] \times \Omega)$ oraz $f(t,\cdot) \in H(\Omega)$ dla każdego $t \in [a,b]$, to funkcja $g(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$ jest holomorficzna na Ω. *Wskazówka*: Twierdzenie Morery.

55. Uzasadnij, że podane funkcje są holomorficzne
$$f(z) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt \quad \text{na } \mathbb{C}; \qquad g(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}\,dt \quad \text{na } \{z : \mathrm{Re}\,z > 0\};$$
$$h(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt \quad \text{na } \{z : \mathrm{Re}\,z < 0\}.$$

56. Jeśli $f \in H(D(a,r))$ dla pewnego r, to a jest m–krotnym zerem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(m)}(a) = 0$ oraz $f^{(k)}(a) = 0$ dla $0 \leq k < m$.

57. Znajdź krotność zera $z = 0$ dla funkcji

$$f_1(z) = (e^{z^2} - 1)z^2; \quad f_2(z) = 2\cos z^2 + z^4 - 2; \quad f_3(z) = e^{\sin z} - 1; \quad f_4(z) = \sin^{2014}(z^{100}).$$

58. Czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu 0 i taka, że (a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$; (b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ dla $n \in \mathbb{N}$?

59. Funkcja $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$ ma ciąg zer zbieżny do 1, ale nie jest stała. Czy to nie sprzeczność z twierdzeniem o zerach?

60. Zbadaj, czy funkcja f ma funkcję pierwotną na Ω, jeśli

    (a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}, \quad \Omega = D(0,1);$

    (b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)};$

    (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1].$

61. Określ rodzaj osobliwości funkcji $f(z) = \dfrac{z - \pi i}{1 + e^z}, \quad g(z) = \exp \dfrac{1}{z-1}.$

Homografią nazywamy odwzorowanie postaci $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$. Przy rozpatrywaniu homografii wygodnie jest do $\mathbb{C}$ dołączyć „punkt w nieskończoności” ∞; oznaczamy $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wówczas homografie są odwzorowaniami z S^2 w S^2, jeśli przyjmiemy, że $f(\infty) = a/c$ i $f(-d/c) = \infty$, gdy $c \neq 0$; $f(\infty) = \infty$, gdy $c = 0$. Przyjmujemy także, że punkt ∞ należy do każdej prostej i nie należy do żadnego okręgu.

62. Sprawdź, że odwzorowanie $z \mapsto 1/z$, jako odwzorowanie S^2 w S^2, przekształca rodzinę okręgów i prostych w siebie. Wywnioskuj stąd, że tę samą własność mają wszystkie homografie.

63. Homografie tworzą grupę przekształceń S^2. *Wsk.* Zadanie 12.

64. Napisz ogólną postać homografii, które przekształcają

    (a) punkty $-1, 0, 1$ odpowiednio na $i, -i, \infty$;

    (b) punkt ∞ na ∞;

    (c) trzy różne punkty $a, b, c \in \mathbb{C}$ na, odpowiednio, punkty $0, 1, \infty$;

    (d) trzy różne punkty $a, b, \infty \in S^2$ na, odpowiednio, punkty $0, 1, \infty$;

    (e) ♡ okrąg $\partial D(0,1)$ na siebie oraz punkt 0 na punkt 0.

65. Niech $\alpha \in D(0,1)$. Sprawdź, że homografia

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

przekształca $D(0,1)$ na siebie oraz punkt α na 0.

66. ♡ Jaka jest ogólna postać homografii, które przekształcają dysk $D(0,1)$ na siebie? *Wskazówka.* Zadania 63, 64(e), 65.

67. ♡ Znajdź homografię przekształcającą dysk $D(0,1)$ na półpłaszczyznę $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ oraz punkt 0 na punkt i.