

Funkcje analityczne

Lista 5

82. Niech $f, F \in H(\Omega)$ spełniają $f(\Omega) \subset D(0, 1) = F(\Omega)$ i niech F będzie różnowartościowa. Załóżmy, że $f(a) = F(a) = 0$. Udowodnij, że wówczas $|f(z)| \leq |F(z)|$ dla $z \in \Omega$.
Wskazówka. Lemat Schwarz'a.
83. Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$. Jeśli $f \in H(\Omega)$ spełnia $|f(z)| < 1$ i $f(0) = 0$, to $|f(z)| \leq |\operatorname{tg} z|$. *Wskazówka.* Poprzednie zadanie.
84. Przypomnijmy, że całka $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ jest zbieżna dla $x > 0$ i $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- (a) Uzasadnij, że funkcja $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ jest dobrze określona i holomorphyzna na $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Uwaga: dla $t > 0$ i $w \in \mathbb{C}$ określamy $t^w := e^{w \ln t}$. *Wskazówka:* Twierdzenia Morery i Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.
- (b) Uzasadnij, że $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dla $z \in \Omega$.
- (c) Korzystając z (b) pokaż, że funkcję Γ można rozszerzyć do funkcji holomorphyznej na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Co można powiedzieć o osobliwościach funkcji Γ ?
- (d) (i) Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n}}{z^{4n} + 1} dz = \frac{\pi}{4n \sin \frac{(2n+1)\pi}{4n}}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Propozycja. Całkować po konturze złożonym z odcinków $\langle e^{\pi i/2n} R, 0 \rangle$, $\langle 0, R \rangle$ i łuku okręgu o środku w 0 i promieniu R .

- (ii) Podstawiając w (i) $z = \left(\frac{y}{1-y}\right)^{1/4n}$, gdzie $y \in (0, 1)$, uzasadnij, że

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{4n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2n+1}{4n}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{(2n+1)\pi}{4n}}.$$

Przypomnienie. $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ dla $p, q > 0$.

- (iii) Uzasadnij, że dla dowolnych $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

- (e) Wywnioskuj, że funkcja $\frac{1}{\Gamma}$ rozszerza się do funkcji całkowitej, która ma zera tylko w punktach $0, -1, -2, \dots$. Znajdź krotności tych zer.

85. Sprawdź, że (zdefiniowana na wykładzie) funkcja d jest istotnie metryką na $C(\Omega)$. Uzasadnij, że zbieżność w metryce d jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej w Ω .
86. Rozwiń funkcję f w szereg Laurenta w podanym pierścieniu.

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ na $A(-1, 0, 2)$, na $A(-1, 2, \infty)$ oraz na $A(0, 1, \infty)$;

(b) $f(z) = (z^2 + 1)e^{1/z}$ na $A(0, 0, \infty)$; (c) $f(z) = \frac{\sin(z^2) - z^2}{z^8}$ na $A(0, 0, \infty)$.

87. Rozwijając funkcję $f(z) = \exp(z + z^{-1}) = e^z e^{1/z}$ w szereg Laurenta na $A(0, 0, \infty)$ uzasadnij, że $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2 \cos t} \cos(nt) dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(n+k)!}$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$

88. Załóżmy, że $f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n(z-p)^n$ dla $z \in A(p, 0, r) = D'(p, r)$, gdzie $r > 0$ (czyli f ma w p osobliwość izolowaną). Znajdź warunek na współczynniki a_n konieczny i dostateczny do tego, by funkcja f miała w punkcie p : (i) osobliwość pozorną; (ii) biegun rzędu $m > 0$; (iii) osobliwość istotną. W przypadku (ii), ile wynosi $\operatorname{res}(f; p)$? Uzasadnij odpowiedź.