Funkcje analityczne — Lista 6

Na wykładzie udowodnimy, że

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = \left(z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{z}{k}) e^{-z/k} \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\dots\}, \quad (1)$$

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

We wzorze (1) liczba γ jest stałą Eulera, $\gamma := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0{,}577\ldots$.

---

89. Korzystając z (1) oraz (2) uzasadnij, że

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

90. Korzystając z (2), wyraź za pomocą funkcji elementarnych

$$\text{(a)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{n^2}), \quad \text{(b)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^4}{n^4}), \quad \text{(c)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^4}{n^4}).$$

91. Uzasadnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi \cosh(\pi z)}{2z \sinh(\pi z)} - \frac{1}{2z^2}.$$

Dla jakich z zachodzi ta równość?

92. Napisz ogólną postać funkcji całkowitych (używając iloczynu nieskończonego i czynników Weierstrassa), która mają jednokrotne zera (tylko) w punktach

   (a) $1, 3, 5, 7, \ldots$;

   (b) $\ln 1, \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{3}, \ln\frac{1}{4}, \ldots$;

   (c) $\exp(1), \exp(\frac{1}{2}), \exp(\frac{1}{3}), \exp(\frac{1}{4}), \ldots$.

93. ♡ Sprawdź, że dla ustalonego $(b_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell^\infty$ wzór $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ określa funkcję holomorficzną na $D(0,1)$. Wywnioskuj stąd, że dla $1 \le p < \infty$ zbiór

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n^k}\right)_{k=0}^{\infty} : n = 2,3,4,\ldots \right\} \subset \ell^p$$

jest liniowo gęsty w ℓ^p. *Wskazówka.* Twierdzenie o zerach funkcji holomorficznych, postać $(\ell^p)^*$.