WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 12

141. Załóżmy, że $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$. Pokazać, że wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdych podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ odcinka $[a,b]$ o średnicach $d(\mathcal{P}_1) < \delta$ i $d(\mathcal{P}_2) < \delta$ i dowolnych wyborów punktów pośrednich $\bar{\xi}$ i $\bar{\xi^*}$ mamy

$$|\sigma(f,\mathcal{P}_1,\bar{\xi}) - \sigma(f,\mathcal{P}_2,\bar{\xi^*})| < \varepsilon.$$

142. Załóżmy, że dla pewnej liczba $M > 0$ i dla każdego $\delta > 0$ istnieją: podział $\mathcal{P}$ o średnicy $d(\mathcal{P}) < \delta$ oraz sumy Riemanna $\sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi})$ i $\sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi^*})$ takie, że $|\sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi}) - \sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi^*})| \geqslant M$. Pokazać, że $f \notin \mathsf{R}_{[a,b]}$.

143. Załóżmy, że $\int\limits_a^b f(x)dx$ istnieje i że istnieje liczba A o tej własności, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $\delta > 0$ istnieją: podział $\mathcal{P}$ odcinka $[a,b]$ o średnicy $d(\mathcal{P}) < \delta$ i suma Riemanna $\sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi})$ spełniająca nierówność $|\sigma(f,\mathcal{P},\bar{\xi}) - A| < \varepsilon$. Pokazać, że wtedy $\int\limits_a^b f(x)dx = A$.

144. Korzystając z definicji (oznacza to również znalezienie liczby L) pokazać, że

$$\int\limits_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Wsk. Pokazać najpierw, że jeśli $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jest podziałem odcinka $[a,b]$, to istnieją punkty $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ takie, że

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \sum_{k=1}^{n} c_k^2\,(x_k - x_{k-1}).$$

145. Postępując podobnie jak w zadaniu poprzednim pokazać z definicji, że

$$\int\limits_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

146. Wyznaczyć $\underline{\int\limits_0^1} f(x)dx$ i $\overline{\int\limits_0^1} f(x)dx$ dla

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

147. Korzystając z kryterium : $f \in \mathsf{R}_{[a,b]} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{P}$ taki, że $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$ pokazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \neq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{dla } x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

jest R-całkowalna na przedziale $[0,1]$. Obliczyć $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

148. Niech $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$. Wiadomo, że $f(x) \geqslant \alpha > 0$ dla $x \in [a,b]$. Pokazać, że $\left(\frac{1}{f}\right) \in \mathsf{R}_{[a,b]}$.

149. Rozpatrując odpowiednie funkcje i przedziały obliczyć następujące granice korzystując z definicji całki oznaczonej :

a) $a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$, b) $a_n = \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$,

c) $a_n = \ln \sqrt[n]{(1+\frac{2}{n}) \cdot (1+\frac{4}{n}) \ldots (1+\frac{2n}{n})}$, d) $a_n = \frac{\sqrt[2n]{e} + \sqrt[2n]{e^2} + \cdots + \sqrt[2n]{e^n}}{n}$,

e) $a_n = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+2\cdot 1^2} + \sqrt{n^2+2\cdot 2^2} + \sqrt{n^2+2\cdot 3^2} + \ldots + \sqrt{n^2+2n^2}\right)$.