WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 13

150. Niech $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ i niech g będzie funkcją ograniczoną na $[a,b]$. Zbiór $B = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ ma tę własność, że dla każdego $\varepsilon > 0$ można go pokryć skończoną liczbą odcinków domkniętych zawartych w $[a,b]$, których łączna długość jest mniejsza niż ε. Pokazać, że $g \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ i $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

151. Załóżmy, że funkcja $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$. Zdefiniujmy

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy} \quad f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{gdy} \quad f(x) < 0, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad f(x) \geqslant 0, \\ f(x) & \text{gdy} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Pokazać, że $f^+ \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ i $f^- \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ oraz $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx$.

152. Załóżmy, że f jest funkcją nieujemną na $[a,b]$ oraz $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Pokazać, że w każdym punkcie $x_0 \in [a,b]$, w którym f jest ciągła mamy $f(x_0) = 0$.

153. Załóżmy, że $f \in C_{[a,b]}$ i f nie jest stała na $[a,b]$. Pokazać, że jeśli $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, to istnieją punkty $x_1, x_2 \in [a,b]$ takie, że $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Czy teza zachodzi, gdy $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$?

154. Załóżmy, że $f \in C_{[a,b]}$. Pokazać, że dla każdego podziału $\mathcal{P}$ odcinka $[a,b]$ istnieje taka suma Riemanna $\sigma(f, \mathcal{P}, \bar{\xi})$, że $\sigma(f, \mathcal{P}, \bar{\xi}) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

155. Wykreślić funkcje:

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sign}(\sin t)dt$; b) $g(x) = \displaystyle\int_0^x t[t]dt$, $x \geqslant 0$.

156. Funkcja $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ i $f(x) \geqslant 0$. Pokazać, że funkcja $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ jest niemalejąca na $[a,b]$.

157. Niech $f(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$, gdzie $g(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} (1 + \sin t^2)dt$. Obliczyć $f'(\pi/2)$.

158. Obliczyć granice:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

159. Niech $f \in \mathsf{R}_{[-a,a]}$. Dowieść, że jeśli f jest fukcją nieparzystą, to $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$. Jeśli natomiast f jest funkcją parzystą, to $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Korzystając z tych faktów obliczyć całki

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1+x^5}{1-x^5} dx$; b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x e^{\sin|x|} dx$.

160. Zakładając ciągłość funkcji f pokazać, że: a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$; c) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

161. Uzasadnić równości:

a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx + \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x dx = \frac{\pi}{4}$; b) $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = e$.