WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 14

162. Pokazać, że jeśli $g(x) = x + \alpha$ i α jest stałą, to $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathsf{R}_{[a,b]}$ oraz zachodzi $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dx$.

163. Pokazać na przykładzie, że $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ może istnieć, nawet jeśli f jest nieograniczona na $[a, b]$.

164. Niech $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$ i niech $\bar{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ będzie pewnym wyborem punktów pośrednich. Połóżmy $\xi_0 = a$ i $\xi_{n+1} = b$. Sprawdzić, że prawdziwa jest równość

$$\sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)[f(x_j) - f(x_{j-1}] = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \sum_{j=0}^{n} f(x_j)[g(\xi_{j+1}) - g(\xi_j)].$$

Następnie pokazać, że jeśli $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ istnieje, to istnieje również $\int_a^b g(x)\,df(x)$ oraz

$$\int_a^b g(x)\,df(x) = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

165. Załóżmy, że $f \in \mathsf{C}_{[a,b]}$ i $g' \in \mathsf{R}_{[a,b]}$. Pokazać, że $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ istnieje i zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

166. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$ na przedziale $[0, \pi/4]$.

167. Uzasadnić podane nierówności:

a) $0 < \displaystyle\int_0^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20}dx < 0{,}01;$ b) $\displaystyle\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int_0^{1} \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}dx < \frac{1}{20}.$

168. Określmy funkcję $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \sin t^2 dt$. Całkując przez podstawienie $u = t^2$ i korzystając (w podobny sposób jak na wykładzie) z drugiego twierdzenia o wartości średniej pokazać, że $|g(x)| < \dfrac{2}{x}$ dla $x > 0$.

169. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą lub krzywymi:

a) $y = \dfrac{2}{1+x^2},\ y = x^2;$ b) $y^2 = x^2(4 - x^2);$ c) $x^4 + y^4 = 2x^2y$ (Podst. $y = tx$).

170. Obliczyć pole obszaru ograniczonego pętlą krzywej $x(t) = 2t - t^2,\ y(t) = 2t^2 - t^3$.

171. Obliczyć długość krzywej:

a) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ 1 \leqslant y \leqslant e;$

b) $x(t) = 2(\cos t + \sin t),\ y(t) = 2(\cos t - \sin t),\ t \in [0, \pi].$

172. Wyznaczyć pole obszaru ograniczonego lemniskatą Bernoulliego $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

173. Pokazać, że pole jednego zwoju spirali Archimedesa $\rho = a\varphi$, $a > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, jest równe $\frac{1}{3}$ pola koła o promieniu $r = 2a\pi$. (Wynik ten znany był Archimedesowi!)

174. Obliczyć objętość bryły otrzymanej z obrotu krzywej

a) $y = x\sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$, dookoła osi $0x$;

b) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$, dookoła osi $0x$; c) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$, dookoła osi $0y$;

d) jednej arkady cykloidy $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ dookoła osi $0x$ i $0y$.