WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 15

175. Wyznaczyć objętość bryły B jeśli:

a) Podstawą bryły B jest koło o promieniu r a równoległe przekroje bryły B, prostopadłe do jej podstawy, są kwadratami.

b) Podstawą bryły B is obszar $\{(x,y) : x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$. Przekroje bryły B prostopadłe do osi Oy są trójkątami równobocznymi.

176. Pokazać, że dla naturalnych $n \geqslant 2$ mamy $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^n}\,dx = \frac{1}{(n-1)^2}$.

177. Niech $I_n = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że dla $n \geqslant 2$ mamy $I_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$.

178. Dla $n \in \mathbb{N}$ określmy $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$. Pokazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!$.

179. Zbadać zbieżność całek:

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx; \quad \int\limits_1^3 \frac{dx}{x\ln x}; \quad \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx; \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx; \quad \int\limits_0^\infty \frac{x^3}{1+e^x}dx; \quad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}e^x};$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}dx; \quad \int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{x+\sin x+\operatorname{tg} x}; \quad \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sin 2x)}{e^{\sin x}-1}dx; \quad \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

180. Obliczyć objętość bryły otrzymanej z obrotu dookoła osi $0x$ krzywej $y = e^{-x}\sqrt{|\sin x|}$, $x \geqslant 0$.

181. Pokazać, że całka $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)dx$ jest zbieżna. Wywnioskować stąd, że warunek $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ nie jest warunkiem koniecznym zbieżności całki $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

182. Niech f będzie funkcją ciągłą na półprostej $[1,\infty)$. Pokazać, że jeśli całka $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to również całka $\int\limits_1^\infty f(x^2)dx$ jest zbieżna. Czy ze zbieżności całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 f(x)dx$ musi wynikać zbieżność całki $\int\limits_0^1 f(x^2)dx$?

183. Korzystając z kryterium Dirichleta zbadać zbieżność całek:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x}\cos x dx; \qquad \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx \quad (\alpha > 0).$$

184. Niech $f, g \in C_{[0,\infty)}$ i niech $g(x) > 0$ dla $x \geqslant 172$. Załóżmy, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Pokazać, że zbieżność całki $\int\limits_0^\infty g(x)dx$ implikuje bezwzględną zbieżność całki $\int\limits_0^\infty f(x)dx$.

185. O funkcji f wiadomo, że: jest dodatnia na półprostej $[0,\infty)$, istnieje właściwa granica $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ oraz całka $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ jest zbieżna. Pokazać, że wtedy $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$.