WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 17

197. Pokazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo.

198. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

199. Pokazać, że jeśli $0 < p \leqslant 1$ i $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ jest zbieżny.

200. Pokazać, że gdy $|q| < 1$, to $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(q-1)^2}$.

201. Sprawdzić, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, gdzie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

są rozbieżne, a ich iloczyn Cauchy'ego jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym .

202. Zbadać zbieżność iloczynu nieskończonego:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! - n!(2n)!}{(3n)!}$, b) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{n} + \sqrt{n+1})$.

203. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) Iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ jest zbieżny.

(ii) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |a_n|)$ jest zbieżny.

(iii) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

204. Wyznaczyć dziedziny zbieżności punktowej oraz funkcje graniczne dla następujących ciągów funkcyjnych:

a) $f_n(x) = x^n(1-x)$; b) $f_n(x) = nx^n(1-x)$; c) $f_n(x) = nxe^{-nx}$; d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$;
e) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$.
Sprawdzić, czy są to także dziedziny zbieżności jednostajnej? Jeśli nie, to znaleźć zbiory, na których zbieżność jest jednostajna.

205. Załóżmy, że ciągi funkcyjne (f_n) i (g_n) są jednostajnie zbieżne na D do funkcji f i g, odpowiednio. Załóżmy dalej, że oba ciągi są wspólnie ograniczone tzn. istnieją stałe A i B takie, że dla każdego $x \in D$ oraz każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $|f_n(x)| \leqslant A$ oraz $|g_n(x)| \leqslant B$. Pokazać, że wtedy ciąg funkcyjny $(f_n g_n)$ jest zbieżny jednostajnie na D do funkcji fg.

206. Podać przykład ciągów funkcyjnych (f_n) i (g_n) zbieżnych jednostajnie na pewnym zbiorze D, dla których ciąg funkcyjny $(f_n g_n)$ jest zbieżny punktowo na D lecz nie jest zbieżny jednostajnie.

207. Pokazać, że ciąg funkcyjny (f_n), gdzie $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n$, jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$ do funkcji $f(x) \equiv 0$. Czy ciąg (f_n') jest zbieżny? Czy mamy tutaj równość

$$\lim_{x \to 1} \left[\lim_{n \to \infty} \frac{df_n}{dx}(x)\right] = \lim_{n \to \infty} \frac{df_n}{dx}(1) \ ?$$

Czy ciąg (f_n') jest zbieżny jednostajnie na półprostej $[0, \infty)$?

208. Pokazać, że ciag $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n(x + \frac{\pi}{2})$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$ do funkcji różniczkowalnej, ale

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

209. Pokazać, że ciąg funkcyjny $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ jest punktowo zbieżny na przedziale $[0, 1]$. Znaleźć jego funkcję graniczną. Czy zbieżność jest jednostajna? Czy prawdziwa jest równość

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx \ ?$$