WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 18

210. Wyznaczyć granice

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^4 \frac{n}{x} \sin \frac{x}{n}\, dx$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^{2n}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx$.

211. Wyznaczyć dziedziny zbieżności punktowej szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

212. Zbadać jednostajną zbieżność szeregów na podanych zbiorach:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln n}{1+n^4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < \infty$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \operatorname{arc\,tg}(x^2+n^2)}{n^2}$, $|x| \leqslant 1$.

213. Pokazać, że funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

214. Czy funkcja $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ jest ciągła na przedziale $[2, 2014]$?

215. Niech (a_n) będzie ciągiem monotonicznie zbieżnym do zera. Pokazać, że $g(x) = \int\limits_0^{3x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt\, dt$ jest funkcją różniczkowalna na $[\pi/21, 7\pi/12]$ i wyznaczyć $g'(x)$.

216. Wyznaczyć obszary zbieżności i zbieżności jednostajnej szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n - 2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x+2)^n$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$; e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

217. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{n!} - x^{2n+1}\right)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

218. Szeregi potęgowe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mają promienie zbieżności R_1 i R_2, odpowiednio. Co można powiedzieć o promieniach zbieżności szeregów a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$ i b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

219. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych znaleźć sumy szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n5^n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)7^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)3^n}{n4^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)}{(2n-1)8^n}$.

220. Napisać szeregi Maclaurina następujących funkcji i określić ich przedziały zbieżności:

a) $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^3}$; b) $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$; c) $f(x) = e^{-x^3}$; d) $f(x) = (x-2)\ln(1+x)$.

221. Obliczyć: a) $f^{(24)}(0)$ i $f^{(25)}(0)$, gdy $f(x) = \frac{x}{8+x^3}$;

b) $f^{(24)}(-1)$ i $f^{(25)}(-1)$, gdy $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$;

c) $f^{(24)}(-1)$ i $f^{(25)}(-1)$, gdy $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$.

222. Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$.