WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 19

223. Korzystając z szeregów Maclaurina funkcji elementarnych oraz twierdzeń o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć sumy szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n n!}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

224. Funkcję

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p},$$

gdzie $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nazywamy funkcją Bessela rzędu p. Pokazać, że

a) $J_0' = -J_1$; b) $J_p' = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1}), \quad p \geqslant 1$;

c) $x^2 J_p'' + x J_p' + (x^2 - p^2) J_p = 0$.

225. Pokazać, że

$$(1+x)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q}{n} x^n$$

także dla $-1 < x < 0$.

226. Niech $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x| < 1$, i niech $b_n \geqslant 0$. Pokazać, że wtedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{x \to 1-} g(x) \qquad \text{(a granica jest właściwa lub niewłaściwa).}$$

227. Korzystając z zad. 226 i równości $\dfrac{d}{dx}(\arcsin x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pokazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

228. Załóżmy, że f jest funkcją okresową o okresie 2π i $f \in \mathsf{R}_{[-\pi,\pi]}$. Pokazać, że wtedy

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

229. Wyznaczyć szeregi Fouriera funkcji okresowych o okresie 2π, określonych na $[-\pi, \pi]$ w następujący sposób:

a) $f(x) = -|x| + \pi$; b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy} \quad x \in (-\pi, 0) \\ 1, & \text{gdy} \quad x \in (0, \pi) \\ 0, & \text{gdy} \quad x \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{cases}$

230. Obliczyć sumy szeregów

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

231. Załóżmy, że f jest funkcją okresową o okresie 2π i $f \in \mathsf{R}_{[-\pi,\pi]}$. Pokazać, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \pi \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

gdzie $S_n(x)$ jest n-tą sumą częściową szeregu Fouriera funkcji f.