WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 20

232. Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$ na przedziale $[-\pi, \pi]$. Następnie uzasadnić równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

233. Pokazaliśmy, że dla $x \in (-\pi, \pi)$ mamy

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Korzystając z tej równości wyznaczyć szeregi Foriera funkcji x^2, x^3 i x^4 na przedziale $(-\pi, \pi)$.

234. Niech $f \in \mathsf{R}_{[-\pi,\pi]}$. Jaką szczególną własność ma szereg Fouriera funkcji f, jeśli spełnia ona warunek
a) $f(x+\pi) = -f(x)$, b) $f(x+\pi) = f(x)$?

235. Niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π. Załóżmy, że $f' \in \mathsf{R}_{[-\pi,\pi]}$. Pokazać, że współczynniki Fouriera a_n i b_n fukcji f spełniają wtedy warunki

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

236. Napisać równość Parsevala dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad |x| \leqslant \beta\ ; \\ 0 & \text{gdy} \quad \beta < |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Następnie wyznaczyć sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\beta}{n^2} \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\beta}{n^2}.$$

237. Niech $D_n(\alpha)$ będzie jądrem Dirichleta. Pokazać, że

a) dla $\alpha \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$D_n(\alpha) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

b) dla $\alpha \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$D_n(\alpha) = \frac{\sin n\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}\cos n\alpha,$$

c) dla $\alpha \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$

$$D_n(\alpha) = \frac{\sin n\alpha}{\alpha} + g(\alpha)\sin n\alpha + \frac{1}{2}\cos n\alpha,$$

gdzie $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{1}{\alpha}$. Następnie pokazać, że jeśli określić $g(0) = 0$, $g(-\pi) = \frac{1}{\pi}$ i $g(\pi) = -\frac{1}{\pi}$ to g jest funkcją ciągłą na $[-\pi, \pi]$.

238. Niech f będzie funkcją o okresie 2π, określoną na przedziale $[0, 2\pi]$ wzorem $f(x) = \left(\dfrac{\pi - x}{2}\right)^2$. Wyznaczyć średnie arytmetyczne $\sigma_n(x) = \dfrac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}$ ciągu sum częściowych szeregu Fouriera funkcji f.

239. Niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π i niech $f \in \mathsf{R}_{[-\pi,\pi]}$. Pokazać, że jeśli $K_n(\alpha)$ jest jądrem Fejéra, a (σ_n) jest ciągiem średnich arytmetycznych ciągu (S_n) sum częściowych szeregu Fouriera funkcji f, to

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+\alpha) + f(x-\alpha)]K_n(\alpha)d\alpha.$$