# 1 Liczby zespolone (przypomnienie)

Rozważamy $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ z działaniami

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Jest to *ciało*; elementami neutralnymi są: $0 = (0, 0)$ (dla dodawania) oraz $1 = (1, 0)$ (dla mnożenia). Oznaczamy to ciało przez $\mathbb{C}$.

Oznaczenia, własności

- $i = (0, 1)$, mamy $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ i wtedy $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) =: x + yi$.
- Dla $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ określamy

  $$\overline{z} = x - yi, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

  Mamy

  $$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xiy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$
  $$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} + i\frac{-\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

- Dla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ piszemy, jak zwykle

  $$z^0 = 1, \quad z^{n+1} = z^n \cdot z, \quad z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

# 2 Metryka na $\mathbb{C}$ (przypomnienie)

TWIERDZENIE **1.** *Dla $z, w \in \mathbb{C}$ i $\alpha > 0$ mamy*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad |\alpha z| = \alpha|z|, \quad |z| = 0 \implies z = 0.$$

*Innymi słowy, $|\cdot|$ jest* normą *na $\mathbb{C}$, a $d(z, w) = |z - w|$ –* metryką.

*Dowód.* Łatwy (zob. wykład/ćwiczenia z algebry). $\square$

UWAGA **2.** *Jeśli $z_k = x_k + y_ki$, gdzie $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, to*

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

*czyli $d$ jest metryką euklidesową na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.*

Przypomnimy (z kursu z topologii) szereg własności i pojęć dotyczących przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C}, d)$ (w skrócie $\mathbb{C}$), a przy okazji ustalimy pewne oznaczenia.

- Mówimy, że ciąg $(z_n)$ zbiega do $g \in \mathbb{C}$, jeśli

  $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |z_n - g| < \varepsilon.$$

- Mówimy, że ciąg $(z_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego (w $\mathbb{C}$), jeśli

  $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall m, n \geq n_0 \;\; |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

- Fakt: $\mathbb{C}$ jest przestrzenią metryczną zupełną, tzn. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.
- (ciąg $(z_n)$ zbiega do $g \in \mathbb{C}$ ) $\iff$ ($\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} g$ oraz $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} g$).
- Jeśli $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, to $\lim(z_n + w_n) = z + w$, $\lim(\alpha z_n) = \alpha z$, $\lim(z_n w_n) = zw$.
- *Dyskiem* o środku w $z_0 \in \mathbb{C}$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

- Wnętrze zbioru $E \subset \mathbb{C}$

$$\operatorname{Int} E = \{z \in \mathbb{C} : \exists \rho > 0 \;\; D(z, \rho) \subset E\}.$$

  Mówimy, że zbiór $E$ jest *otwarty*, gdy $E = \operatorname{Int} E$. Wnętrze zbioru $E$ jest największym zbiorem otwartym zawartym w $E$.

- Domknięcie zbioru $E \subset \mathbb{C}$

$$\overline{E} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{C} \setminus E).$$

  Mówimy, że zbiór $E$ jest *domknięty*, gdy $E = \overline{E}$, albo równoważnie, gdy $\mathbb{C} \setminus E$ jest otwarty. Domknięcie zbioru $E$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym $E$.

- Brzeg zbioru $E \subset \mathbb{C}$

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus E}.$$

# 3 Funkcje zespolone, ciągłość (przypomnienie)

W tym rozdziale niech $E \subset \mathbb{C}$ i $f : E \to \mathbb{C}$.

Definicja **3.** *Mówimy, że $z_0 \in \mathbb{C}$ jest* punktem skupienia *zbioru $E$, jeśli $z_0 \in \overline{E \setminus \{z_0\}}$. Jeśli $z_0$ nie jest punktem skupienia $E$, ale $z_0 \in E$, to $z_0$ nazywamy* punktem izolowanym *zbioru $E$.*

Przykład **4.** $0$ *jest jedynym punktem skupienia zbioru $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, a* $1, 1/2, 1/3, \ldots$ *są punktami izolowanymi $E$.*

Definicja **5.** *Jeśli $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem skupienia $E$, to mówimy, że $f : E \to \mathbb{C}$ ma* granicę *$g$ w punkcie $z_0$ (ozn. $g = \lim_{z \to z_0} f(z)$), jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall z \in E \;\; (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

Fakt **6.** *($g = \lim_{z \to z_0} f(z)$) $\iff$ (dla każdego ciągu $(z_n)$, $z_n \in E \setminus \{z_0\}$, zbieżnego do $z_0$ mamy $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = g$).*

Definicja **7.** *Mówimy, że $f : E \to \mathbb{C}$ jest* ciągła *w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeśli*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall z \in E \;\; (|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

Fakt **8.** *Funkcja $f : E \to \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $z_0 \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z_0$ jest puktem izolowanym $E$, lub gdy $z_0$ jest punktem skupienia zbioru $E$ oraz*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Oznaczenie: $C(E) = \{f\colon E \to \mathbb{C} : f$ jest funkcją ciągłą$\}$.

**Twierdzenie 9.** *(a) Jeśli $f, g \in C(E)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, to funkcje $f+g$, $fg$, $\alpha f$ są ciągłe.*

*(b) Jeśli $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{C}$ są ciągłe, to $g \circ f \in C(E_1)$.*

*(c) Jeśli $f \in C(E)$ i $f \neq 0$ na $E$, to funkcja $1/f \in C(E)$.*

**Przykład 10.**

- *Funkcje* Re, Im, $|\cdot|$, $z \mapsto \overline{z}$ *są ciągłe na $\mathbb{C}$ (dowód na ćwiczeniach).*
- *Funkcje stałe oraz $f(z) = z$ są ciągłe na $\mathbb{C}$. Stąd z części (a) i (b) twierdzenia 9 otrzymujemy, że każdy wielomian*

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

*jest ciągły na $\mathbb{C}$, a każda funkcja wymierna*

$$f(z) = P(z)/Q(z), \quad \text{gdzie } P, Q \text{ są wielomianami,}$$

*jest ciągła na swojej dziedzinie, czyli na $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.*

# 4 Szeregi zespolone (przypomnienie)

**Definicja 11.** *Niech $(a_k)$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest* zbieżny*, jeśli ciąg sum częściowych $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. W takiej sytuacji granicę $lim_{n\to\infty} s_n$ nazywamy* sumą szeregu *$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i oznaczamy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = lim_{n\to\infty} s_n$.*

*Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy* rozbieżnym.

*Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest* bezwzględnie zbieżny*, jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ jest zbieżny.*

Przypomnijmy twierdzenia znane z analizy.

**Twierdzenie 12.**

- *Jeśli szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$*
- *Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny i $\alpha \in \mathbb{C}$, to zbieżny jest też szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$*
- *(Warunek konieczny zbieżności) Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, to $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*
- *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*
- *(Kryterium porównawcze) Jeśli $|a_k| \leq b_k$ i szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny.*
- *(Kryterium d'Alemberta) Jeśli*

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

*to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli natomiast*

$$\liminf_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1,$$

*to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).*

- *(Kryterium Cauchy'ego) Jeśli*
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$
*to szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli natomiast*
$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1,$$
*to szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).*

- *(Kryterium Dirichleta) Jeśli* $(a_k)$ *jest ciągiem malejącym (czyli w szczególności ma wyrazy rzeczywiste) zbieżnym do zera, a ciąg zespolony* $(b_k)$ *jest taki, że* $(\sum_{k=1}^{n} b_k)$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *jest zbieżny.*

*Dowód.* Dla przykładu podamy dowód części kryterium d'Alemberta oraz kryterium Dirichleta.

- Niech $q = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$. Wybierzmy liczbę $r \in (q, 1)$. Z definicji granicy górnej dla $\varepsilon = r - q$ otrzymujemy, że istnieje $k_0$ takie, że
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq r, \qquad \text{dla } k \geq k_0.$$
Stąd $|a_{k_0+1}| \leq |a_{k_0}|r$, $|a_{k_0+2}| \leq |a_{k_0+1}|r \leq |a_{k_0}|r^2$, .... Przez łatwą indukcję otrzymujemy nierówności
$$|a_{k_0+n}| \leq |a_{k_0}|r^n, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$
Ponieważ $r \in (0, 1)$, więc szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ jest zbieżny. Stąd z krytertium porównawczego zbieżny jest szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{k_0+n}|,$$
czyli też szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

- Niech $R_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje $M$ takie, że $|S_n| \leq M$. Pokażemy, że ciąg $(R_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego. Mamy
$$\begin{aligned}
|R_{n+m} - R_n| &= |\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}(S_{n+k} - S_{n+k-1})| = \\
&= |\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}S_{n+k} - \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k+1}S_{n+k}| \\
&= |\sum_{k=1}^{m-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1})S_{n+k} + a_{n+m}S_{n+m} - a_{n+1}S_n| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m-1} |(a_{n+k} - a_{n+k+1})S_{n+k}| + |a_{n+m}S_{n+m}| + |a_{n+1}S_n| \\
&\leq M(a_{n+m} + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1})) \\
&= 2Ma_{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$
dla dostatecznie dużych $n$.

$\square$

# 5 Ciągi i szeregi funkcyjne (przypomnienie)

Definicja **13.** *Niech $E \subset \mathbb{C}$ i $f_n : E \to \mathbb{C}$.*

- *Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n)$ zbiega punktowo do funkcji $f$ na zbiorze $E$, jeśli dla każdego $z \in E$ mamy*
$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$
*Piszemy wówczas $f_n \to f$ na $E$.*

- *Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n)$ zbiega jednostajnie do funkcji $f$ na zbiorze $E$, jeśli*
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$
*Piszemy wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na $E$.*

- *Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zbiega punktowo (jednostajnie) do funkcji $f$ na zbiorze $E$, jeżeli ciąg funkcyjny $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ zbiega punktowo (odpowiednio, jednostajnie) do funkcji $f$ na $E$.*

Twierdzenie **14.** *(Kryterium Weierstrassa) Jeżeli dla wszystkich $z \in E$ oraz $n \in N$ zachodzi*
$$|f_n(z)| \leq a_n$$
*i szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $E$.*

Twierdzenie **15.** *Jeśli $f_n : E \to \mathbb{C}$ jest ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym jednostajnie do funkcji $f$ na $E$, to $f$ też jest funkcją ciągłą.*

*Dowód.* Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $z_0 \in E$. Istnieje $n_0$ takie, że dla $n \geq n_0$ mamy
$$\sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/4.$$
Z ciągłości funkcji $f_{n_0}$ w punkcie $z_0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/2$ dla $|z - z_0| < \delta$. Mamy dla $|z - z_0| < \delta$
$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.\end{aligned}$$
□

# 6 Szeregi potęgowe (przypomnienie)

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n.$$

Definicja **16.** Promieniem zbieżności *szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ nazywamy wartość*
$$R = \sup\{r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n \text{ jest zbieżny dla } |z-p| \leq r\}.$$

Twierdzenie **17.** *Niech* $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Wówczas*

- $R = \frac{1}{\lambda}$, *gdy* $0 < \lambda < \infty$;
- $R = 0$, *gdy* $\lambda = \infty$;
- $R = \infty$, *gdy* $\lambda = 0$

*jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$. *Szereg ten jest rozbieżny, gdy* $|z-p| > R$.

*Dowód.* Przy ustalonym $z$ zastosujmy kryterium Cauchy'ego do szeregu (liczbowego) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$. Mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-p)^n|} = \limsup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}|z-p|) = \lambda|z-p|,$$

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ jest zbieżny, gdy $\lambda|z-p| < 1$ i rozbieżny, gdy $\lambda|z-p| > 1$. Stąd teza. $\square$