Algebra F1 - Lista 12

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Sprawdzić, czy U i W jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V.

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leq 5\}, \quad W = \{(t, 4t)\colon t \in \mathbb{R}\}.$

(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(2x-y, 3y+2z, x+y+z)\colon x, y, z \in \mathbb{R}^3\}, \quad W = \{(x, y, z)\colon 3x+y+2z+4 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{R}^4, \quad U = \{(x, y, z, t)\colon x = 2y + z - t\}, \quad W = \{(x, y, z, t)\colon |x| = y + z + t\}.$

Zad.2 Wektor $(3, 4, 5)$ przedstawić jako kombinacje liniową wektorów

(a) $(1, 2, 3), (1, 1, 1)$

(b) $(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$

(c) $(1, -2, -3), (4, 2, 2), (1, 1, 2)$

(d) $(2, 1, 4), (1, 1, 2), (1, 3, -1)$

Zad.3 Zbadać liniową niezależność wektorów w odpowiedniej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$

(a) $(1, 2), (1, 1), (3, 4)$

(b) $(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$

(c) $(1, -2, -3), (4, 2, 2), (3, 4, 5)$

(d) $(2, 1, 4, 3), (1, 1, 2, 1), (1, 3, -1, 2)$

Zad.4 Niech wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ będą liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów

(a) $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}$

(b) $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{w}$

(c) $\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}, \vec{w} - \vec{v}$

(d) $2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + 2\vec{v} + 4\vec{w}, 2\vec{u} - 2\vec{w} + 3\vec{w}$

Zad.5* Uzasadnić, że wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ o współrzędnych $\vec{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn})$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = m$$

Zad.6 Korzystając z poprzedniego zadania

(a) zbadać niezależność wektorów $(1, -2, 0, 1, 1)$, $(1, -1, 1, 0, 2)$, $(3, -4, 2, 1, 5)$, $(1, -3, -1, 2, 0)$

(b) zbadać niezależność wektorów $(1, 1, 3, 2, 1)$,$(2, 3, 7, 3, 4)$,$(1, 4, 6, -1, 8)$

(c) sprawdzić czy wektor $(1, 0, 0, 0)$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $(1, 0, 1, -1)$, $(2, 1, 5, -2)$, $(1, 0, 3, -5)$

Zad.7* Niech $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ oraz $\vec{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$. Uzasadnić, że jeśli

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & v_{m3} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = k < m,$$

to wśród wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ można znaleźć k wektorów liniowo niezależnych, a każde $k + 1$ wektórów bedzie liniowo zależnych.