# Algebra F1 - Lista 1

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Podpunkty oznaczone małymi literami rozwiązują wszyscy. Podpunkty oznaczone dużymi literami oraz zadania z gwiazdką oznaczają problemy trudniejsze przeznaczone dla osób chcących pogłębić znajomość tematu – do rozwiązywania w domu.

**Zad.1** Znaleźć liczby rzeczywiste $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające dane równania:

(a) $x(3-2i)+y(4-5i)=10-9i$,
(b) $x(-\sqrt{2}+i)+y(3\sqrt{2}+5i)=8i$,
(c) $x(4-3i)^2+y(1+i)^2=7-12i$,
(d) $(2+3yi)(x-2i)=2+xi$,
(e) $\frac{x}{3+1}+\frac{y}{1-3i}=1$,
(f) $x\frac{2+i}{3-i}+y\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2=1+i$.

**Zad.2** Znaleźć liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$ spełniające dane równania:

(a) $2\mathrm{z}+\overline{\mathrm{z}}+5\mathrm{i}=6$,
(b) $2z+(1+i)\overline{z}+3i=1$,
(c) $4\overline{\mathrm{z}}=\mathrm{z}^2+4$,

**Zad.3** Znaleźć wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$ takie, że $z^2$ jest liczbą rzeczywistą.

**Zad.4** Znaleźć wszystkie liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$ spełniające dane równania:

(a) $z^2=\overline{z}$
(b) $z^3=\overline{z}$,
(c) $(\overline{z})^2=z^2$,

**Zad.5** Punkty $z_1=0, z_2=3+2i, z_3=2+3i$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć czwarty wierzchołek tego równoległoboku. Zrobić rysunek.

**Zad.6** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory punktów $z \in \mathbb{C}$ spełniającym dane warunki:

(a) $\mathrm{Re}(iz-1)\leq 0$,
(b) $\mathrm{Im}(z^2)>0$,
(c) $z+i=\overline{z-i}$,
(d) $9\geq z\overline{z}$,
(e) $0<|z+i|<4$,
(f) $\mathrm{Re}\,\frac{1-z}{1+z}=1$.
(g) $|z+i|=|z-1|$,
(h) $\frac{|z+3i|}{|z-i|}\geq 1$,
(A) $\frac{|z-2|}{|z-1|}=2$.

**Zad.7*** Udowodnić, że dla każdych liczb $z \in \mathbb{C}$ oraz $r \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość: $|z|^2+|riz|^2=|z-riz|^2$. Jaki jest sens geometryczny tej równości?

**Zad.8*** Dla danych $a, b, c \in \mathbb{C}$ wyprowadzić wzór na rozwiązania równania $az^2+bz+c=0$,

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}, \qquad z_1=\frac{-b-\delta}{2a},$$

gdzie $\delta \in \mathbb{C}$ jest liczbą taką, że $\delta^2=b^2-4ac$.

**Zad.9** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

(a) $z^2+4z+5=0$,
(b) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$,
(c) $z^4+2z^2-3=0$,
(d) $z^4-3iz^2+4=0$.