Algebra F1 - Lista 1

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Znaleźć postać trygonometryczną liczb zespolonych:

(a) $4+4i$, (b) $-\sqrt{3}+i$, (c) $2-2\sqrt{3}i$,
(d) $2[\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)]$, (e) $2[-\cos(\pi/3)+i\sin(-\pi/3)]$, (f) $i+\mathrm{tg}(\pi/6)$.

Zad.2 Obliczyć wartość wyrażenia:

(a) i^{2014}, (b) $(2-2i)^{10}$, (c) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$,
(d) $\dfrac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3})^6}$, (e) $[\cos(\pi/5)-i\sin(\pi/5)]^{25}$, (f) $(1+i\,\mathrm{ctg}(\pi/24))^{12}+(1-i\,\mathrm{ctg}(\pi/24))^{12}$.

Zad.3 Przedstawić w postaci algebraicznej liczbę $z=\sum\limits_{n=1}^{15}(\sqrt{3}-i)^n$.

Zad.4 Obliczyć i zaznaczyć na płaszczyźnie punkty odpowiadające danym pierwiastkom:

(a) $\sqrt[3]{i}$, (b) $\sqrt{-11+60i}$, (c) $\sqrt[4]{-16}$,
(d) $\sqrt{(3+i)^4}$, (e) $\sqrt[4]{(-3+2i)^4}$, (f) $\sqrt[3]{(1-i)^9}$.

Zad.5 Rozwiązać równania

(a) $z^5=32\overline{z}$, (b) $(z+1)^4=i(z+i)^4$,
(d) $z^6=(1-i)^{12}$, (e) $z^4+3iz^2+4=0$.

Zad.6 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory punktów $z\in\mathbb{C}$ spełniającym dane warunki:

(a) $\mathrm{Im}(z^4)>0$, (b) $(z+1)^4=i(z+i)^4$, (c) $\pi/2<\arg(z)<\pi$,
(d) $\arg(-\overline{z})\geq\pi/2$, (e) $z^6=(\sqrt{3}+i)^6$, (f) $0<\arg(z^3)<\pi/2$.

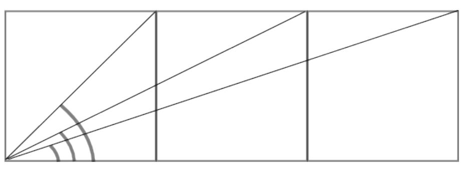
Zad.7* Liczba $z=1+\sqrt{3}i$ jest jednym z wierzchołków kwadratu o środku w punkcie $z_0=2$. znaleźć pozostałe wierzchołki kwadratu.

Zad.8* Uzasadnić, że trójkąt o środku w punkcie $z_0=0$ i wierzchołkach z_1,z_2,z_3 jest równoboczny wtedy i tylko wtedy gdy $z_1+z_2+z_3=0$.

Zad.9* Niech $z_1,z_2,\ldots,z_n$ będą wierzchołkami n-kąta foremnego o środku w punkcie $z_0=0$. Pokazać, że $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$.

Zad.10* Niech $\mathrm{tg}\,\alpha=1\cdot\mathrm{tg}\,\beta=2\cdot\mathrm{tg}\,\gamma=3$. Obliczyć $\alpha+\beta+\gamma$.

wsk.:



Zad.11* Obliczyć $\sum\limits_{k=0}^{n}z^k\sin(k\varphi)$ oraz $\sum\limits_{k=0}^{n}z^k\cos(k\varphi)$.