ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

ALGEBRA LINIOWA 1

Kursy MAP1029, 1039, 1070, 1140, 1141, 3046, 3055

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu oraz określa rodzaje i przybliżony stopień trudności zadań, które pojawią się na kolokwiach i egzaminach. Na ćwiczeniach należy rozwiązać 1-2 podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (p) oraz symbolem (*). Zadania oznaczone literą (p) są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką (*) są trudne. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Za kilkanaście dni na końcu listy umieszczone zostaną po 4 przykładowe zestawy zadań z obu kolokwiów oraz egzaminu podstawowego i poprawkowego.

Uzdolnionym studentom proponujemy udział w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów z kilku ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej
http://im.pwr.edu.pl/StudenciCelujace.php

Przed sprawdzianami warto zapoznać się z zestawieniem błędów, które studenci często popełniają na kolokwiach i egzaminach z matematyki.
http://prac.im.pwr.edu.pl/˜skoczylas/typowe_bledy_studentow.pdf

Opracowanie: doc. dr Zbigniew Skoczylas

Lista zadań

1. (p) Podać przykłady liczb rzeczywistych, dla których **nie zachodzą** równości:
   a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; **b)** $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; **c)** $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
   d) $\sqrt{x^2} = x$; **e)** $\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{x+u}{y+v}$; **f)** $\sin 2x = 2\sin x$;
   h) $|x+y| = |x| + |y|$; **i)** $\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \log_2(a-b)$; **j)** $a^n \cdot a^m = a^{n\cdot m}$.

2. Za pomocą indukcji matematycznej uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą tożsamości:
   a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;
   b) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
   c) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$ $(x \neq k\pi)$.

3. Korzystając z indukcji matematycznej uzasadnić nierówności:
   a) $2^n > n^2$ dla $n \geqslant 5$;
   b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$;
   c) $n! > 2^n$ dla $n \geqslant 4$;
   d) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ dla $x \geqslant -1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ (nierówność Bernoulliego);
   e) $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ dla $n \geqslant 6$.

4. Metodą indukcji matematycznej pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:
   a) $n^5 - n$ jest podzielna przez 5;
   b) $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

[0]Zadania z listy pochodzą z książek „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory", „AiGA. Przykłady i zadania", „AiGA. Kolokwia i egzaminy" oraz „Wstęp do analizy i algebry".

5. (*) Uzasadnić, że n kwadratów można podzielić na części, z których da się złożyć kwadrat.

6. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:

   a) $(2x+y)^4$; **b)** $\left(c-\sqrt{2}\right)^6$; **c)** $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$; **d)** $(\sqrt{u}-\sqrt[4]{v})^8$.

7. (*) Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:

   a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; **b)** $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$; **c)** $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

8. **a)** W rozwinięciu wyrażenia $\left(a^3+\frac{1}{a^2}\right)^{15}$ znaleźć współczynnik przy a^5;

   b) W rozwinięciu wyrażenia $\left(\sqrt[4]{x^5}-\frac{3}{x^3}\right)^7$ znaleźć współczynnik przy $\sqrt[4]{x}$.

★★★

9. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równań znaleźć ich rozwiązania:

   a) $\overline{z}=(2-i)z$; **b)** $z^2+4=0$; **c)** $(1+3i)\,z+(2-5i)\,\overline{z}=2i-3$; **d*)** $z^3=1$.

10. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

    a) $\operatorname{Re}(z+1)=\operatorname{Im}(2z-4i)$; **b)** $\operatorname{Re}\left(z^2\right)=0$; **c)** $\operatorname{Im}\left(z^2\right)\leqslant 8$; **d)** $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>\operatorname{Im}(iz)$.

11. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

    a) $|z+2-3i|<4$; **b)** $|z+5i|\geqslant|3-4i|$; **c)** $|z-1|=|1+5i-z|$,

    d) $|z+3i|<|z-1-4i|$; **e)** $|iz+5-2i|<|1+i|$; **f)** $|\overline{z}+2-3i|<5$;

    g) $\left|\frac{z-3i}{z}\right|>1$; **h)** $\left|\frac{z^2+4}{z-2i}\right|\leqslant 1$; **i)** $\left|z^2+2iz-1\right|<9$; (j*)

    $$2\,|z-1|<\left|z^2-z+2\right|\leqslant 3\,|z-2|$$

12. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

    a) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$; **b)** $\left(\sqrt[5]{2}-i\sqrt[5]{2}\right)^{15}$; **c)** $\left(2i-\sqrt{12}\right)^9$; **d*)** $(i-2)^{24}\,(13+9i)^8$; **e*)** $\frac{(7+i)^{11}}{(2+i)^{22}}$.

13. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy pierwiastków:

    a) $\sqrt[4]{-16}$; **b)** $\sqrt[3]{27i}$; **c*)** $\sqrt[4]{(2-i)^8}$; **d)** $\sqrt[6]{8}$.

14. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

    a) $z^2-2z+10=0$; **b)** $z^2+3iz+4=0$; **c)** $z^4+5z^2+4=0$;

    d) $z^2+(1-3i)\,z-2-i=0$; **e)** $z^6=(1-i)^{12}$; **f)** $(z-i)^4=(z+1)^4$.

★★★

15. (p) Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

    a) x^3+3x^2-4; **b)** $x^4-2x^3+x^2-8x-12$; **c)** x^4-x^2-2.

16. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

    a) $12x^3+8x^2-3x-2$; **b)** $3x^3-2x^2+3x-2$; **c)** $6x^4+7x^2+2$.

17. (p) Wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone wraz z krotnościami wielomianów:

    a) $(x-1)\,(x+2)^3$; **b)** $(2x+6)^2\,(1-4x)^5$, **c)** $\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)^3\left(z^2+9\right)^4$.

18. Nie wykonując dzieleń wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:

    a) $P(x)=x^8+3x^5+x^2+4$, $Q(x)=x^2-1$;

    b) $P(x)=x^{47}+2x^5-13$, $Q(x)=x^3-x^2+x-1$;

    c) $P(x)=x^{99}-2x^{98}+4x^{97}$, $Q(x)=x^4-16$;

    d*) $P(x)=x^{2006}+x^{1002}-1$, $Q(x)=x^4+1$;

    e*) $P(x)=x^{444}+x^{111}+x-1, Q(x)=\left(x^2+1\right)^2$.

19. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego P, to liczba $\overline{z_1}$ także jest pierwiastkiem wielomianu P. Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$ wiedząc, że jednym z nich jest $x_1 = 1 + 2i$.

20. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:

    a) $x^3 - 27$; b) $x^4 + 16$; c) $x^4 + x^2 + 4$; d*) $x^6 + 1$.

21. Podane funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

    a) $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$; **b)** $\frac{x+9}{x(x+3)^2}$; **c)** $\frac{3x^2+4x+3}{x^3-x^2+4x-4}$; **d)** $\frac{x^3-2x^2-7x+6}{x^4+10x^2+9}$.

★★★

22. Niech $\vec{a} = (3, -3, 0, 9)$, $\vec{b} = (1, 2, 1, 4)$ będą wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

    Wyznaczyć wektory:

    a) $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$;

    b) $\vec{x} = \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{a}$.

23. Obliczyć:

    a) Odległość punktów $A = (1, -2, 3, 0, 0)$, $B = (0, 1, -2, 3, -4)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^5$;

    b) Obliczyć kąt między wektorami $\vec{a} = (-1, 0, 2, 2)$, $\vec{b} = (0, -2, 1, -2)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$;

    ★★★

24. (p) Trójkąt jest rozpięty na wektorach $\vec{a}, \vec{b}$. Wyrazić środkowe trójkąta przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

25. (p) Przekątnymi równoległoboku są wektory $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$. Wyznaczyć kąt ostry między bokami równoległoboku.

26. Długości wektorów $\vec{a}, \vec{b}$ wynoszą odpowiednio 3, 5. Znamy iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b} = -2$. Obliczyć $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \circ \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)$.

27. (p) Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 3)$ i tworzy kąt 120^o z dodatnią częścią osi Ox.

28. (p) Napisać równania prostej (normalne, kierunkowe, parametryczne) przechodzącej przez punkty $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-3, 7)$.

29. (p) Znaleźć punkty przecięcia prostej

$$l : \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

    z osiami układu współrzędnych. Czy punkt $P = (4, 7)$ należy do prostej l?

30. Znaleźć punkt przecięcia prostych:

$$k : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, \quad l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

31. (p) Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$ i jest

    a) równoległa do prostej $3x - y + 2 = 0$;

    b) prostopadła do prostej $x + y = 0$.

32. Dla jakiej wartości parametru m, odległość punktów $P = (1, 0)$ i $Q = (m + 3, -2)$ jest równa 4?

33. (p) Wyznaczyć odległość punktu $P_0 = (-4, 1)$ od prostej l o równaniu $3x + 4y + 12 = 0$.

34. (p) Znaleźć odległość prostych równoległych l_1, l_2 o równaniach odpowiednio $x - 2y = 0$, $-3x + 6y - 15 = 0$.

35. Obliczyć wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (0,0)\,, B = (-1,3)\,, C = (2,5)$ opuszczoną z wierzchołka C.

36. (*) Znaleźć równania dwusiecznych kątów wyznaczonych przez proste o równaniach $3x+4y-2=0,\ 4x-3y+5=0$.

★★★

37. **a)** Dla jakich wartości parametrów p, q wektory $\vec{\boldsymbol{a}} = (1-p, 3, -1)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{b}} = (-2, 4-q, 2)$ są równoległe?

b) Dla jakich wartości parametru s wektory $\vec{\boldsymbol{p}} = (s, 2, 1-s)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{q}} = (s, 1, -2)$ są prostopadłe?

38. (p) Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów $\vec{\boldsymbol{u}} = (-1, 3, 0)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{v}} = (0, 1, 1)\,.$

39. (p) Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami $\vec{\boldsymbol{p}} = (0, 3, 4)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{q}} = (2, 1, -2)\,.$

40. **a)** Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{\boldsymbol{u}} = (-1, 2, 5)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{v}} = (0, 3, 2)\,.$

b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (0,0,1)\,,\ B = (3,0,0)\,,\ C = (0,-5,0)\,.$

c) Trójkąt ma wierzchołki $A = (0,0,1)\,,\ B = (2,3,-2)\,,\ C = (1,1,4)\,.$ Obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

41. **a)** Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\vec{\boldsymbol{a}} = (1,2,3)\,,\ \ \vec{\boldsymbol{b}} = (0,4,1)\,,\ \vec{\boldsymbol{c}} = (-1,0,2)\,.$

b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach: $A = (1,1,1)\,,\ B = (1,2,3)\,,\ C = (0,4,1)\,,\ D = (2,2,2)\,.$

c) Dla czworościanu z punktu **b)** obliczyć wysokość opuszczoną z wierzchołka A.

42. Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny:

a) przechodzącej przez punkty $P = (1,-1,0)\,,\ Q = (2,3,7)\,,\ R = (4,0,1)\,;$

b) przechodzącej przez punkt $A = (-2,5,4)$ oraz zawierającą oś Oz;

c) przechodzącej przez punkt $A = (-2,5,4)$ oraz prostopadłej do osi Oy.

43. Pokazać, że równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = 3 - t + 2s, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t - 3s; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 + 3t + 3s, \\ y = t - s, \\ z = -2t - 4s \end{cases}$$

przedstawiają tę samą płaszczyznę.

44. **a)** Płaszczyznę $\pi : 2x + y - z - 7 = 0$ zapisać w postaci parametrycznej.

b) Płaszczyznę $\pi : \begin{cases} x &= & s + t, \\ y &= & -2 \quad - 2t, \\ z &= & 3 + 3s - t \end{cases}$ przekształcić do postaci normalnej.

45. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:

a) przechodzącej przez punkty $A = (-3,4,1)\,,\ B = (0,2,1)\,.$

b) przechodzącej przez punkt $P = (3,-1,2)$ i przecinającej prostopadle oś Oy.

46. Pokazać, że równania:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 4t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 4 - 8t \end{cases}$$

przedstawiają tę samą prostą.

47. **a)** Prostą $l : \begin{cases} x + y - 3 &= 0 \\ -y + z - 1 &= 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej.

b) Prostą $l : x = 3,\ y = 2 - 2t,\ z = t$ zapisać w postaci krawędziowej.

48. Wyznaczyć punkt przecięcia:

a) prostej $l: x=t,\ y=1-2t,\ z=-3+2t$ oraz płaszczyzny $\pi: 3x-y-2z-5=0$;

b) płaszczyzn $\pi_1: x+2y-z-5=0,\quad \pi_2: x+2y+2=0,\quad \pi_3: x+y+z=0$;

c) prostych $l_1: x=1-t,\ y=1,\ z=-3+2t,\quad l_2: x=t,\ y=3-2t,\ z=2-5t$.

49. Obliczyć odległość:

a) punktu $P=(0,1,-2)$ od płaszczyzny $\pi: 3x-4y+12z-1=0$;

b) płaszczyzn równoległych $\pi_1: x-2y+2z-3=0$, $\pi_2: -2x+4y-4z+18=0$;

c) punktu $P=(2,-5,1)$ od prostej $l: x=t,\ y=1-2t,\ z=-3+2t$;

d) prostych równoległych

$$l_1: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z-1 &= 0 \end{cases},\quad l_2: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z+4 &= 0 \end{cases};$$

e) prostych skośnych $l_1: x=1-t,\ y=1,\ z=-3+2t,\quad l_2: x=s,\ y=3-2s,\ z=1-5s$.

50. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu $P=(1,-2,0)$ na:

a) płaszczyznę $\pi: x+y+3z-5=0$;

b) prostą $l: x=1-t,\ y=2t,\ z=3t$.

51. Obliczyć kąt między:

a) płaszczyznami $\pi_1: x-y+3z=0$, $\pi_2: -2x+y-z+5=0$;

b) prostą $l: \begin{cases} x+y+z-3 &= 0 \\ x-2y-z-1 &= 0 \end{cases}$ i płaszczyzną $\pi: x+y=0$;

c) prostymi $l_1: x=-t,\ y=1+2t,\ z=-3,\quad l_2: x=0,\ y=-2s,\ z=2+s$.

★★★

52. We wskazanej przestrzeni zbadać liniową niezależność układów wektorów:

a) $\mathbb{R}^2$, $\vec{a}_1=(2,3)$, $\vec{a}_2=(-1,0)$;

b) $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, $\vec{b}_1=(1,2,3)$, $\vec{b}_2=(3,2,1)$, $\vec{b}_3=(1,1,1)$;

c) $\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$, $\vec{c}_1=(1,0,0,0)$, $\vec{c}_2=(-1,1,0,0)$, $\vec{c}_3=(1,-1,1,0)$, $\vec{c}_4=(-1,1,-1,1)$.

53. Zbadać, czy układy wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych $\mathbb{R}^n$:

a) $\{(1,2,0),(-1,0,3),(0,-2,-3)\}$, $\mathbb{R}^3$;

b) $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$, $\mathbb{R}^4$;

c) $\{(1,-1,0,2),(1,0,3,0),(0,1,3,0),(0,0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^4$.

54. Znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni:

a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{\mathbf{3}}: 3x+2y-z=0\right\}$;

b) $B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^{\mathbf{4}}: x=2y=-t\right\}$;

c) $C=\left\{(u,v,x,y,z)\in\mathbb{R}^{\mathbf{5}}: u+v=0,\ x+y+x=0\right\}$.

55. Zbadać, czy przekształcenia są liniowe:

a) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x_1,x_2)=x_1-3x_2$;

b) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(-x,5x+y,y-2z)$;

c) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$, $F(x)=\left(0,x^2,0,-3x\right)$;

d) $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1x_2,\ x_3x_4)$.

56. Znaleźć macierze przekształceń liniowych w standardowych bazach:

a) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad F(x,y)=(x,y,x-y)$;

b) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\quad F(x,y,z)=(y,z,x,x+y+z)$;

d) $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2,\quad F(x,y,z,t)=(x+y+z+t,y-t,)$.

57. **a)** Uzasadnić, że obrót na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ wokół początku układu współrzędnych o kat φ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tego obrotu w bazach standardowych.

b) Pokazać, że symetria względem osi Oz w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tej symetrii w bazach standardowych.

★★★

58. (p) Dla par macierzy A,B wykonać (jeśli to jest możliwe) działania $3A-\frac{1}{2}B$, A^T, AB, BA, A^2:

a) $A=\begin{bmatrix}1&4\\-2&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&-6\\-8&2\end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix}1&-3&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-4&0\end{bmatrix}$;

c) $A=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2&1&0&5\end{bmatrix}$;

d) $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&-4\\-3&0&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2&0\\4&1\\0&3\end{bmatrix}$.

59. (p) Rozwiązać równanie macierzowe

$$3\left(\begin{bmatrix}1&0\\-3&3\\2&5\end{bmatrix}-X\right)=X+\begin{bmatrix}4&3\\0&6\\-1&2\end{bmatrix}.$$

60. (p) Znaleźć niewiadome x,y,z spełniające równanie

$$2\begin{bmatrix}x+2&y+3\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\y&z\end{bmatrix}^T.$$

61. Podać przykłady macierzy kwadratowych A,B, które spełniają warunki:

a) $AB\neq BA$; **b)** $AB=\mathbf{0}$, ale $A\neq\mathbf{0},B\neq\mathbf{0}$; **c)** $A^2=\mathbf{0}$, ale $A\neq\mathbf{0}$.

62. (*) Pokazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jednoznacznie jako sumę macierzy symetrycznej $\left(A^T=A\right)$ i antysymetrycznej $\left(A^T=-A\right)$. Napisać to przedstawienie dla macierzy

$$B=\begin{bmatrix}0&1&4&-2\\-3&5&2&8\\2&4&-3&-4\\6&0&0&1\end{bmatrix}.$$

63. Dane są przekształcenia liniowe: $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ określone wzorem $L(x,y)=(x,y,x+y)$ oraz $K:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ określone wzorem $K(u,v,w)=u-w$. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy złożenia przekształceń znaleźć macierz przekształcenia $K\circ L$.

★★★

64. Napisać rozwinięcia Laplace'a wyznaczników wg wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

a) $\begin{vmatrix}-1&4&\mathbf{3}\\-3&1&\mathbf{0}\\2&5&\mathbf{-2}\end{vmatrix}$, trzecia kolumna; **b)** $\begin{vmatrix}1&4&-3&7\\-2&4&2&0\\5&4&1&6\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

65. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

66. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że macierze są osobliwe:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

67. **a)** Wiadomo, że $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -24$. Obliczyć $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$;

b) Wiadomo, że $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{x} & \mathbf{y} & 0 \\ 5 & \mathbf{z} & \mathbf{t} & 0 \\ 7 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = 18$. Obliczyć $\det \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$.

68. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy kwadratowej A stopnia n spełniającej warunki:
a) $A^3 = 4A$ dla $n = 3, 4$; **b)** $A^T = -A^2$ dla $n = 3, 4$?

69. Obliczyć $\det(2A)$, jeżeli $\det(3A) = 54$ i $\det(4A) = 128$.

70. **a)** Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach: $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (3, 7)$;
b) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$.

71. (*) Obliczyć wyznaczniki macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \mathbf{4} & 5 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{5} \end{bmatrix}_{n\times n}$.

★★★

72. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do :

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

73. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$; **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

74. Wiadomo, że

$$(A)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$.

75. Macierze A, B mają stopień 3. Ponadto $\det(A) = 4$ oraz $\det(B) = -3$. Obliczyć:
a) $\det\left[A \cdot (6B)^{-1}\right]$; **b)** $\det\left[A^{-1} \cdot (2B)^3 \cdot A^2\right]$.

76. Znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$;

e) $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

77. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układów równań liniowych:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, niewiadoma y;

b) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$, niewiadoma x;

c) $\begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2 \\ x + y + 5z + 2t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = -3 \\ x + y + 3z + 4t = -3 \end{cases}$, niewiadoma z.

★★★

78. Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształceń liniowych znaleźć ich jądra, obrazy i rzędy:

a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, obrót o kąt $\alpha = \frac{\pi}{3}$ wokół początku układu.

b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rzut prostokątny na prostą $x + y = 0$.

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, symetria względem płaszczyzny $y = z$.

d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, obrót wokół osi Oy o kąt $\frac{\pi}{2}$.

79. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz rzędy przekształceń liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$;

b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$;

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$;

d) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $F(x) = (0, x, 0, -x)$.

80. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3 \\ 2x - 3y + z + 5t = -3 \\ x + 2y - 4t = -3 \\ x - y - 4z + 9t = 22 \end{cases}$.

81. **a)** Znaleźć trójmian kwadratowy, który przechodzi przez punkty $(-1,2), (0,-1), (2,4)$.

b) Wyznaczyć współczynniki a, b, c funkcji $y = a2^x + b3^x + c4^x$, która w punktach $-1, 0, 1$ przyjmuje odpowiednio wartości $\frac{3}{4}, 1, 1$.

c) Funkcja $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ spełnia równanie różniczkowe $y'' - 6y' + 13y = 25\sin 2x$. Wyznaczyć współczynniki A, B.

82. **a)** Dla jakich wartości parametru m, podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & mz & = & 0 \\ mx & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. ?$$

b) Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & & & = & a \\ & & & & z & + & t & = & b \\ x & & & + & z & & & = & c \\ & & y & & & + & t & = & d \end{array}\right. ?$$

c) Znaleźć wartości parametru p, dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & - & py & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & pz & = & 5 \end{array}\right. .$$

★★★

83. Korzystając z definicji wyznaczyć wektory i wartości własne przekształceń liniowych:

a) symetria względem osi Oy w przestrzeni $\mathbb{R}^2$;

b) obrót w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wokół osi Ox o kąt $\frac{\pi}{6}$;

c) symetria w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny yOz;

d) rzut prostokątny na oś Oy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

84. Znaleźć wartości i wektory własne przekształceń liniowych:

a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x+y, 2x+2y)$;

c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (-x, 5x+y, y-2z)$;

d) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $F(x,y,z,t) = (0,x,0,y)$.

★★★

85. (p) Napisać równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach $A = (-1,3)$, $B = (5,7)$.

86. (p) Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 2 = 0$.

87. (p) Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (0,6)$.

88. Wyznaczyć równanie okręgu, o środku $S = (3,4)$, który jest styczny do prostej $l : 3x - 4y - 12 = 0$.

89. Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty $P = (3,4)$, $Q = (5,2)$ i ma środek na osi Ox.

90. Dolna połowa okręgu $x^2 + 8x + y^2 - 10y + 2 = 0$ jest wykresem funkcji f zmiennej x. Wyznaczyć funkcję f oraz określić jej dziedzinę.

91. (*) Znaleźć równanie okręgu, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych oraz przechodzi przez punkt $A = (5,8)$. Ile rozwiązań ma zadanie?

92. Znaleźć równanie stycznej okręgu $x^2 + y^2 = 25$:

a) w punkcie $(-3, 4)$;

b) przechodzącej przez punkt $(-5, 10)$;

c) równoległej do prostej $x - y - 4 = 0$;

d) prostopadłej do prostej $x + 2y = 0$.

93. (p) Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród elipsy

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

94. Punkty $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$ są ogniskami elipsy. Znaleźć równanie tej elipsy, jeżeli jednym z jej wierzchołków jest punkt $W = (0, -3)$.

95. Naszkicować elipsę o równaniu $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$.

96. Lewa połowa elipsy $4x^2 + 25y^2 = 100$ jest wykresem funkcji f zmiennej y. Znaleźć funkcję f oraz określić jej dziedzinę.

97. (p) Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

98. Narysować hiperbolę wraz z ogniskami i asymptotami:

a) $9(y+5)^2 - 16(x-2)^2 = 144$;

b) $4x^2 - 25y^2 + 8x = 0$.

99. Wyznaczyć współrzędne ogniska, wierzchołka oraz podać równanie kierownicy paraboli o równaniu: **a)** $y^2 = 12x$; **b)** $y = x^2 + 6x$.

100. Napisać równanie paraboli, której:

a) kierownicą jest prosta $y = -2$, a punkt $W = (-1, 6)$ - wierzchołkiem;

b) kierownicą jest prosta $x = 1$, a punkt $W = (5, 1)$ - wierzchołkiem.

101. Jakie krzywe przedstawiają równania:

a) $x^2 - y^2 + 4 = 0$; **b)** $(x - y)^2 = 1$; **c)** $x^2 + y^2 = 2xy$?