WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 21

240. Znaleźć i narysować dziedziny funkcji:
a) $h(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2 + z^2) - 1}$.

241. Zbadać istnienie następujących granic:
a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^3+y^3+1}-1}$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-3)} \dfrac{xy+12}{x^2+y^2-25}$;
d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin x^2 y}{x^2}$; e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{xy}$;

242. Pokazać, że dla funkcji f określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wzorem $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ mamy:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right]$;
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje.

243. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ 0 < y < x^2\}$. Określmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad (x,y) \notin A, \\ 1 & \text{jeśli} \quad (x,y) \in A. \end{cases}$$

a) Pokazać, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do zera oraz dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, ax_n) = 0$;
b) Sprawdzić, czy istnieje $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
c) Sprawdzić, czy istnieją $f_x(0,0)$ i $f_y(0,0)$.

244. Zbadać istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych I rzędu dla funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\dfrac{x}{y} & \text{jeśli} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli} \quad y = 0. \end{cases}$$

245. Sprawdzić, czy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ dla $f(x,y) = \begin{cases} x^3 \sin\dfrac{y}{x} - y^2 \sin\dfrac{x}{y} & \text{jeśli} \quad xy \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli} \quad xy = 0. \end{cases}$

246. Niech $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{jeśli} \quad x^2+y^2 > 0, \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = y = 0. \end{cases}$ Wiemy, że f jest nieciągła w punkcie $(0,0)$.
a) Pokazać, że f jest funkcją ciągłą po każdej ze zmiennych x i y, gdy druga zmienna jest ustalona.
b) Czy dla f istnieje $f_{xy}(0,0)$?

247. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych ciągłą po x przy każdym ustalonym y i mającą ograniczoną pochodną $f_y(x,y)$ po zmiennej y. Pokazać, że f jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych.

248. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w (x_0, y_0) i niech

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - a - b(x-x_0) - c(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

Pokazać, że $a = f(x_0,y_0)$, $b = f_x(x_0,y_0)$ i $c = f_y(x_0,y_0)$.

249. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0,0)$.

250. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{jeśli} \quad x^2+y^2 > 0, \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = y = 0 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, a jej pochodne cząstkowe $f_x(x,y)$ i $f_y(x,y)$ są nieciągłe w $(0,0)$.