WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 22

251. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ograniczone pochodne cząstkowe f_x i f_y. Pokazać, że f jest ciągła w (x_0, y_0). Czy analogiczny rezultat można sformułować dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

Definicja. Załóżmy, że f jest określona na pewnym otoczeniu punku $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Niech U będzie wersorem w $\mathbb{R}^n$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie P_0 w kierunku wektora U nazywamy granicę

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial U} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tU) - f(P_0)}{t}$$

o ile granica ta istnieje.

252. Określmy $f : \mathbb{R}^n \to R$ wzorem $f(P) = |P|^2$. Obliczyć $\dfrac{\partial f(P)}{\partial U}$ jeśli $U = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

253. Niech U będzie dowolnym wersorem w $\mathbb{R}^2$ i niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy \sin x}{x^2 + y^2} & \text{jeśli} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jeśli} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Obliczyć $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial U}$.

254. Pokazać, że dla każdego wersora U funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + 2y^2} & \text{jeśli} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jeśli} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial U}$, ale f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

255. Niech $f : \mathbb{R}^n \to R$ będzie funkcją różniczkowalną w P_0 i niech $U = (u_1, \ldots, u_n)$ będzie wersorem w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial U} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0) u_i$$

Podać wersor U, dla którego $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial U}$ osiąga maksymalną wartość.