WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 23

256. Prostą przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i prostopadłą do płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, nazywamy *prostą normalną do powierzchni* $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0).
Wyznaczyć równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, do powierzchni:

a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$,

b) $z = \ln xy$, $(x_0 y_0 > 0)$.

257. Wyznaczyć $df = d_P f$, $d_{P_0} f$ oraz $(d_{P_0} f)(P - P_0)$ w następujących przypadkach:

a) $f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)}$, $\quad P_0 = (0, 0, 0)$,

b) $f(P) = \ln(1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n)$, $\quad P_0 = (0, 0, \ldots, 0)$,

c) $f(P) = |P|^{2r}$, $\quad P_0 = (1, 1, \ldots, 1)$.

258. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma dziedzinę D_f a funkcja wektorowa $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ma dziedziną $D_G \subset \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że zbiór

$$T = \{U : U \in D_G \quad \text{i} \quad G(U) \in D_f\}$$

jest niepusty. Na zbiorze T określmy funkcję $h = f \circ G$. Niech U_0 będzie punktem skupienia zbioru T i niech $U_0 \in T$. Pokazać, że jeśli G jest ciągła w punkcie U_0 a f jest ciągła w $P_0 = G(U_0)$, to h jest ciągła w U_0.

259. Niech $h(U) = f(G(U))$. Wyznaczyć $d_{U_0} h$ na dwa sposoby (podobnie jak na wykładzie) dla:

a) $U_0 = (u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 1)$, $\quad f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)}$,
$$g_1(u, v, w) = \ln u - \ln v + \ln w,$$
$$g_2(u, v, w) = -2\ln u - 3\ln w,$$
$$g_3(u, v, w) = \ln u + \ln v + 2\ln w.$$

b) $U_0 = (u_0, v_0, w_0) = (4, \pi/3, \pi/6)$, $\quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,
$$g_1(u, v, w) = u \cos v \sin w,$$
$$g_2(u, v, w) = u \cos v \cos w$$
$$g_3(u, v, w) = u \sin v.$$

260. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Zdefiniujmy funkcję $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco

$$h(u, v) = f(g(u, v), -g(u, v)).$$

Pokazać, że wtedy $dh = (f_x - f_y)dg$.

261. Niech $h(r, \varphi, \psi) = f(x, y, z)$, gdzie $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$ i $z = r\cos\psi$. Wyznaczyć h_r, h_φ, h_ψ w zależności od f_x, f_y i f_z. Następnie wyznaczyć h_{rr} i $h_{r\varphi}$ w zależności od pochodnych cząstkowych funkcji f.

262. Niech f i g będą różniczkowalne i niech $u(x, y) = f(x - cy) + g(x + cy)$. Pokazać, że $u_{yy} = c^2 u_{xx}$.

263. Mówimy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednorodną stopnia r, jeśli dla dowolnego $t > 0$ i każdego P zachodzi $f(tP) = t^r f(P)$. Pokazać, że jeśli f jest funkcją różniczkowalną i jednorodną stopnia r, to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(P) = r f(P).$$

Załóżmy dalej, że f jest klasy C^2. Pokazać, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f_{x_i x_j}(P) = r(r-1) f(P).$$