WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 25

275. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz punktu (x_0, y_0) takich aby $W(x_0, y_0) = 0$, a funkcja f:
a) miała w punkcie (x_0, y_0) min. lokalne,
b) miała w punkcie (x_0, y_0) max. lokalne,
c) nie miała w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalnego.

276. Wyznaczyć F', J_F oraz odwzorowanie afiniczne G dla którego $\lim_{P \to P_0} \dfrac{F(P) - G(P)}{|P - P_0|} = 0$, jeśli

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2 + y + 2z \\ \cos(x+y+z) \\ e^{xyz} \end{bmatrix}, \qquad P_0 = (1, -1, 0).$$

Przypomnienie: Odwzorowanie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ postaci $T(P) = U_0 + A(P - P_0)$, gdzie U_0 jest stałym wektorem w $\mathbb{R}^m$, A jest stałą macierzą wymiaru $m \times n$, a P_0 jest stałym wektorem w $\mathbb{R}^n$ nazywamy przekształceniem afinicznym.

277. Wyznaczyć F' oraz J_F:

$$a) \quad F(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad b) \quad F(r,\varphi,h) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{bmatrix}, \qquad c) \quad F(r,\varphi,\psi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\sin\psi \\ r\sin\varphi\sin\psi \\ r\cos\psi \end{bmatrix}.$$

278. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym i odwracalnym na zbiorze zwartym S. Pokazać, że F^{-1} jest ciągłe.

279. Niech odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}.$$

a) Pokazać, że F jest lokalnie odwracalnym odwzorowaniem na $\mathbb{R}^2$.
b) Niech $D_F = S_\varphi = \{(x,y) : \varphi \leqslant y < \varphi + 2\pi\}$. Wyznaczyć O_F.
c) Na O_F wyznaczyć funkcję F^{-1}.

280. Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą odwzorowaniami mającymi ciągłe pochodne cząstkowe. Zdefiniujmy $H = F \circ G$. Pokazać, że

$$\frac{\partial(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

281. Niech $H(U) = (F \circ G)(U)$. Wyznaczyć $H'(U_0)$, jeśli

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ \dfrac{z}{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \qquad G(u,v,w) = \begin{bmatrix} w\cos u \sin v \\ w \sin u \sin v \\ w \cos v \end{bmatrix}, \qquad U_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\right).$$

282. Odwzorowanie

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

nazywamy analitycznym na zbiorze S, jeśli na S ma ciągłe pochodne cząstkowe oraz

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Udowodnić, że jeśli $J_F \neq 0$ na S, a F jest tam odwracalne i analityczne, to F^{-1} jest analityczne na $F(S)$.

283. Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma ciągłe pochodne cząstkowe. Załóżmy, że $J_F \neq 0$ i $F^{-1} = G$. Pokazać, że jeśli $U = F(P)$ i $P = G(U)$, to

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = 1.$$