WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 26

284. Znaleźć równanie stycznej w punkcie $(1,1)$ do krzywej danej równaniem uwikłanym

$$ye^x - xe^y + y - x^2 = 0.$$

285. W pobliżu punktu $(1,1)$ narysować fragment krzywej $yx^3 + xy^4 = 2$.

286. Niech $u = u(x,y)$ będzie określona na pewnym otoczeniue punktu $(1,1)$ przez warunki

$$x^2yu + 2xy^2u^3 - 3x^3y^3u^5 = 0 \quad \text{i} \quad u(1,1) = 1.$$

Wyznaczyć równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej w punkcie $(1,1,1)$ do powierzchni $u = u(x,y)$.

287. Niech $u = u(x,y,z)$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu $(1,1,1)$ przez warunki

$$x^2y^5z^2u^5 + 2xy^2u^3 - 3x^3z^2u = 0 \quad \text{i} \quad u(1,1,1) = 1.$$

Wyznaczyć $u_x(1,1,1)$, $u_y(1,1,1)$ i $u_z(1,1,1)$.

288. Załóżmy, że odwzorowanie $F = (f,g,h)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe na pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)$. Niech $F(P_0) = 0$ i niech w punkcie P_0

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,u)} \neq 0.$$

Czy warunki

$$F(x,y,z,u,v) = 0, \quad y(x_0,v_0) = y_0, \quad z(x_0,v_0) = z_0, \quad u(x_0,v_0) = u_0$$

wyznaczają y, z i u jako funkcje zmiennych x i v, mające ciągłe pochodne cząstkowe na pewnym otoczeniu punktu (x_0,v_0)? Jeśli tak, to wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu tych funkcji jako stosunki odpowiednich jakobianów.

289. Uzasadnić, że gradient funkcji różniczkowalnej jest prostopadły do poziomicy tej funkcji.

290. Uzasadnić, że układ

$$\begin{cases} e^x\cos y + e^z\cos u + e^v\cos w + x = 3 \\ e^x\sin y + e^z\sin u + e^v\cos w = 1 \\ e^x\operatorname{tg} y + e^z\operatorname{tg} u + e^v\operatorname{tg} w + z = 0 \end{cases}$$

określa wokół punktu $(0,0,0)$ funkcje u, v i w zmiennych x, y i z. Wyznaczyć $u_x(0,0,0)$, $v_x(0,0,0)$ i $w_x(0,0,0)$.

291. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = f(x)$ określonej równaniem:

a) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ b) $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

292. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f przy zadanym warunku

a) $f(x,y) = x + y$ przy warunku $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$;

b) $f(x,y) = -\frac{x^2}{4} + 3xy + y^2$ przy warunku $x^2 + y^2 = 13$.

293. Niech $n \geqslant 1$, $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$. Udowodnić znaną nam nierówność $\dfrac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ tym razem wyznaczając minimum warunkowe funkcji $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ przy ograniczeniu $x + y = \gamma$.

294. Pokazać, że jeśli $x_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$, oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n\alpha$, dla pewnej dodatniej liczby α, to

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \leqslant \binom{n}{2}\alpha^2.$$