

WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 27

295. Korzystając z definicji wyznaczyć całkę $\int_R xy \, d(x, y)$, gdzie $R = [0, 2] \times [1, 3]$.

296. Funkcja $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 2y, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, określona jest na kwadracie $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Pokazać, że $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx = 1$, lecz f nie jest całkowna na R .

297. Załóżmy, że istnieją całki $\int_a^b f(x) \, dx$ i $\int_c^d g(y) \, dy$.

a) Pokazać, że istnieją całki $\int_R f(x) \, d(x, y)$ i $\int_R g(y) \, d(x, y)$, gdzie $R = [a, b] \times [c, d]$.

b) Pokazać, że istnieje całka $\int_R f(x)g(y) \, d(x, y)$.

c) Pokazać, że $\int_R f(x)g(y) \, d(x, y) = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_c^d g(y) \, dy \right)$.

298. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x, y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jeśli } x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2 & \text{jeśli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \\ 3 & \text{jeśli } x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Wyznaczyć

$$\overline{\int_R f(x, y) \, d(x, y)} \quad \text{i} \quad \underline{\int_R f(x, y) \, d(x, y)} \quad \text{dla} \quad R = [a, b] \times [c, d].$$

299. Niech $R = [a, b] \times [c, d]$. Funkcja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca względem każdej ze zmiennych przy ustalonej drugiej zmiennej. Pokazać, że f jest całkowna na R .

300. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym $S \subset \mathbb{R}^n$. Pokazać, że powierzchnia $z = f(X)$, $X \in S$, ma zerową objętość w \mathbb{R}^{n+1} .

301. a) Niech f będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym $S \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f(X) = 0$ poza zbiorem o zerowej objętości. Pokazać, że

$$\int_S f(X) \, dX = 0.$$

b) Załóżmy, że $\int_S g(X) \, dX$ istnieje. Niech h będzie funkcją ograniczoną na S taką, że $h(X) = g(X)$ poza zbiorem o zerowej objętości. Pokazać, że h jest całkowna na S oraz

$$\int_S h(X) \, dX = \int_S g(X) \, dX$$

302. Obliczyć całkę $\int_R f(x, y) \, d(x, y)$, jeśli $R = [0, 2] \times [0, 2]$, a $f(x, y) = [x + y]$.

303. Załóżmy, że $\int_a^b f(x) \, dx$ istnieje. Rozpatrując całkę $\int_R (f(x) - f(y))^2 \, d(x, y)$, gdzie $R = [a, b] \times [a, b]$, udowodnić nierówność

$$\left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x) \, dx.$$