WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 28

304. Udowodnij, że jeśli f jest ciągła na $[a,b]\times[c,d]$, to funkcja $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ jest ciągła na $[c,d]$.

305. Niech $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. Obliczyć całki

a) $\int_R (x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dX$, b) $\int_R (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,dX$ c) $\int_R (x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)\,dX$.

306. Korzystając z twierdzenia Fubiniego pokazać, że jeśli pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ są ciągłe na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^2$, to są na tym zbiorze równe.

307. Niech f będzie funkcją ciągłą. Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych

a) $\int_1^e dy\int_{\ln\frac{1}{y}}^{\ln y} f(x,y)\,dx$, b) $\int_{-1}^1 dy\int_{-1}^{y^3} f(x,y)\,dx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{2-y^2} f(x,y)\,dx$.

308. Niech f będzie funkcją ciągłą na zbiorze $S\subset\mathbb{R}^3$, ograniczonym powierzchniami $x^2+y^2=-2y$, $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$ i $z=x^2+y^2-9$.
Uzupełnić zapisy

a) $\int_S f(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int dx\int dy\int f(x,y,z)\,dz$,

b) $\int_S f(x,y,z)\,d(x,y,z)=\sum\int dz\int dy\int f(x,y,z)\,dx$.

309. Obliczyć całkę

$$\int_S \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,d(x,y,z),$$

jeśli S ograniczony jest płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$ i $x+y+z=1$.

310. Obliczyć objętość n-wymiarowej piramidy $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1$, $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0$.

311. Krzywa $x=\sqrt{3}|y|$ rozcina koło $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ na trzy części. Korzystając z całek podwójnych, obliczyć pole każdej z nich.

312. Stosując odpowiednią zamianę zmiennych w całce, obliczyć pole obszaru

a) $S_1=\{(x,y):(x^2+y^2)^2\leqslant 2(x^2-y^2)\}$,

b) $S_2=\{(x,y):ax\leqslant y^2\leqslant bx,\ \alpha y\leqslant x^2\leqslant\beta y\}$, gdzie $0<a<b$ oraz $0<\alpha<\beta$.

313. Niech $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $t\geqslant 0$ określmy funkcję $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ wzorem

$$F(t)=\int_{S(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,d(x,y,z),$$

gdzie $S(t)=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant t^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$. Wykazać, że $F'(t)=\pi t^2 f(t^2)/2$.

314. Obiczyć objętość bryły, którą z kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $R>0$, wycina

a) walec $x^2+y^2=a^2$, $0<a<R$, b) walec $x^2+y^2=Rx$, c) stożek $z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

315. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej ograniczonej powierzchniami $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$ i $z=0$.

316. Znaleźć zależność między całkami $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,d(x,y,z)$ i $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$ i wyznaczyć ich wartości.