Algebra F2 - Lista 10

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Sprawdzić, czy podane funkcje są iloczynami skalarnymi w przestrzeni V

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$, gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

(c) $V = \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$

(e) $V = \mathbb{R}^3$, $(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

(f) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $(p, q) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(2)q(2)$. Obliczyć $(x^2 + 1, -x + 3)$.

Zad.2 W podanych przestrzeniach euklidesowych obliczyć kąt pomiedzy wektorami (funkcjami)

(a) $V = \mathbf{E}^2$, $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (3, 1)$

(b) $V = \mathbf{E}^4$, $\vec{u} = (1, -2, 3, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, 1, -1)$

(c) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $p(x) = x^2 + x - 2$, $q(x) = 2x^3 + 1$, gdzie $(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

Zad.3 Obliczyć kąt między wektorami $\vec{x_1} = (1, 2)$, $\vec{y} = (3, -1)$ dla iloczynów skalarnych z zadania 1.

Zad.4 Znaleźć w $V = \mathbb{R}^4$ zbiór wektorów prostopadłych do wektorów $\vec{u} = (2, 1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1, 0)$. Czy jest to przestrzeń liniowa? Jeśli tak, to znaleźć jej bazę ortonormalną.

Zad.5 Uzasadnić, że jeśli $a > 0$ oraz $ab - c^2 > 0$, to

$$(\vec{x}, \vec{y}) = [x_1\ x_2] \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\vec{x_1} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ wyznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$.

Zad.6 * Uzasadnić, że jeśli $(\cdot, \cdot)$ jest iloczynem skalarnym przestrzeni $\mathbb{R}^2$, oraz $L \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ to $[\vec{u}, \vec{v}] = (L\vec{u}, L\vec{v})$ też jest iloczynem skalarnym.