# Algebra F2 - Lista 11

WPPT, kier. fizyka, I rok.

**Zad.1** Uzasadnić, że wektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\vec{w} = (w_1, w_1, w_3, w_4) \in \mathbf{E}^4$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy gdy

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}^T$$

jest macierzą diagonalną. Co można powiedzieć o $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, gdy $A$ jest macierzą jednostkową? Napisać podobny fakt dla $m$ wektorów w przestrzeni $\mathbf{E}^n$.

**Zad.2** Zastosować wynik z poprzedniego zadania aby sprawdzić, czy podane wektory są ortogonalne (ortonormalne) w podanej przestrzeni euklidesowej

(a) $V = \mathbf{E}^4$, $\vec{u} = (1, -1, 2, 0), \vec{v} = (2, 4, -1, 2), \vec{w} = (3, -1, -2, -2)$

(b) $V = \mathbf{E}^5$, $\vec{u} = (1, 0, 2, -1, 1), \vec{v} = (1, 1, 0, 2, 1), \vec{w} = (0, -1, 1, 1, -1)$

**Zad.3** Znaleźć bazę ortonormalną $B$ przestrzeni liniowej

(a) $V = \text{lin}\{(0, 1, -2, 1), (3, 0, -1, 1)\} \subset \mathbf{E}^4$,

(b) $V = \text{lin}\{(0, 0, 1, 1), (0, 1, -2, 1), (3, 0, -1, 1)\} \subset \mathbf{E}^4$.

Znaleźć współrzędne wektora $(3, 1, -3, 2)$ w bazie $B$.

**Zad.4** Zortogonalizować wektory w podanej przestrzeni euklidesowej

(a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^4$

(b) $\{(1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, 1), (1, 3, 3, 2)\}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^4$

(c) $\{x^2 + 1, 2x - 1, x + 1\}$, $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[x]$, gdzie iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

(d) $\{\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$, $\mathbf{E} = C([0, \pi])$, gdzie iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x) \cos x \, dx$$

**Zad.5** Podany zbiór wektorów uzupełnić do bazy ortogonalnej przestrzeni euklidesowej $V$.

(a) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$, $V = \mathbf{E}^4$

(b) $\{1, x\}$, $V = \mathbb{R}_3[x]$, $(p, q) = p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

(c) $\{1, x + 1\}$, $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[x]$,

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

(d) $\{\sin x, \sin^2 x, \sin^3 x\}$, $\mathbf{E} = C([0, \pi])$, gdzie iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(f, g) = \int_0^{\pi/2} f(x)g(x) \cos x \, dx$$

**Zad.6 *** Czy podany zbiór wektorów tworzy układ ortogonalny w przestrzeni euklidesowej $V$?

(a) $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$, $V = C([0, \pi])$, gdzie iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$

(b) $\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$, $V = C([-\pi, \pi])$, gdzie iloczyn skalarny jest dany wzorem

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$$