Algebra F2 - Lista 12

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Niech $\mathbf{E}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : 3x = y = 2z\}$. Które z poniższych wektorów są ortogonalne do $\mathbf{E}_0$?

$$\vec{u} = (3, -1, 0), \qquad \vec{v} = (3, -2, 2), \qquad \vec{w} = (3, -1, -2)$$

Zad.2 Niech $\mathbf{E}_0 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{E}^4 : 2x = y, y+z+t = 0\}$. Które z poniższych wektorów są ortogonalne do $\mathbf{E}_0$?

$$\vec{u} = (2, -1, 1, 1), \qquad \vec{v} = (2, -1, 0, 1), \qquad \vec{w} = (0, 1, 1, 1)$$

Zad.3 Znaleźć rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń $\mathbf{E}_0$

(a) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}_0$ jest osią Ox, $\vec{v} = (1, 1)$

(b) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^2$, $\mathbf{E}_0$ jest prostą o równaniu $y = 2x$, $\vec{v} = (3, 5)$

(c) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^3$, $\mathbf{E}_0$ jest osią Oy, $\vec{v} = (2, -3, 4)$

(d) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^3$, $\mathbf{E}_0$ jest prostą o równaniu $x = y = 2z$, $\vec{v} = (-1, 3, 2)$

(e) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^3$, $\mathbf{E}_0$ jest płaszczyzną o równaniu $x + y + 2z = 0$, $\vec{v} = (1, -3, 2)$

Zad.4 Znaleźć rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń $\mathbf{E}_0$

(a) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^4$, $\mathbf{E}_0 = \mathrm{lin}\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$

(b) $\mathbf{E} = \mathbf{E}^4$, $\mathbf{E}_0 = \mathrm{lin}\{(1, 2, 1, 0), (0, -1, 1, 1)\}$, $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$

(c) $\mathbf{E} = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathbf{E}_0 = \mathrm{lin}\{(1, x\}$, $p(x) = x^2$. Iloczyn skalarny jest zadany wzorem

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

(d) $\mathbf{E} = ([0, 2\pi])$, $\mathbf{E}_0 = \mathrm{lin}\{1, \cos x\}$, $f(x) = x$. Iloczyn skalarny jest zadany wzorem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Zad.5 Zaproponować, jak można określić odległość wektora z przestrzeni euklidesowej (skończenie wymiarowej) od jej podprzestrzeni liniowej. Znaleźć tę odległość dla przykładów z zadań 3 i 4.

Zad.6 * Czy dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbf{E}$ zawsze się da określić odległość wektora $\vec{v} \in \mathbf{E}$ od podprzestrzeni liniowej $\mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}$?