Algebra F2 - Lista 1

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Sprawdzić, czy podane zbiory są przestrzeniami liniowymi

(a) $V = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \colon p(3) = 1\}, \ W = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \colon p(3) = 0\}$

(b) $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon 2p(x) = p(2x)\}, \ W = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon p(0) = 0 \vee p'(0) = 0\}$

(c) $V = \{f \in C(\mathbb{R}) \colon f \text{ jest różniczkowalna}\}, \quad W = \{f \in C(\mathbb{R}) \colon f \text{ jest niemalejąca}\}$

(d) $V = \{a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{ istnieje}\}$,
$V = \{a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\}$

Zad.2 Zbadać liniową niezależność zbioru wektorów w przestrzeni liniowej V:

(a) $V = \mathbb{R}[x], \quad A = \{x^2 + x + 1, x^2 - 1, 2x^2 + 1\}$,
$B = \{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1, x^3 + x^2 + x, x^3 - x^2 + x, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$

(b) $V = C([0, 2\pi]), \quad A = \{1, \sin x, \cos x\}, \quad B = \{\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x\}$

(c*) $V = C(\mathbb{R}), \quad A = \{\sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(10x)\}$,
$B = \{\cos^{10}(x), 1, \cos x, \cos(2x), \ldots, \cos(10x)\}$

Zad.3 Sprawdzić, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:

(a) $V = \mathbb{R}_2[x], \quad B = \{x + 1, x^2 + 2x, x\}$,

(b) $V = \mathbb{R}_3[x], \quad B = \{x^3 + 1, x^2 + 2x, x^3 - 2\}$,

(c) $V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(2) = 0\}, \quad B = \{x - 2, x(x-2), x^2(x-2)\}$,

(d) $V = M_{2\times 2}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

Zad.4 Uzupełnić podane zbiory do bazy przestrzeni liniowej V

(a) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(1, 3, 4)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}_3[x], \quad A = \{x, x^3 - 1\}$

(c) $V = \{(x, y, z) \colon x - y + 3z = 0\}, \quad A = \{(1, 1, 0)\}$

Zad.5 Znaleźć bazy i podać wymiary podprzestrzeni liniowych W

(a) $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \colon p'(x) = xp''(x)\}$

(b) $W = \{p \colon \mathbb{R}_3[x] \colon p'(x) = 0, p(-1) = 0\}$

(c) $W = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \ x_n = 0\}$

(d) $W = \{p \in \mathbb{R}[x] \colon p(4) = p(2) = 0\}$

Zad.6* Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$, $\vec{w} \times \vec{v}$.

Zad.7* Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ będą parami różne (tzn. $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$). Pokazać, że wielomiany

$$W_k(x) = \prod_{\substack{i\in\{0,\ldots,n\} \\ i\neq k}} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n,$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$