Algebra F2 - Lista 4

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Sprawdzić, które z poniższych przekształceń są liniowe.

(a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y) = (2x+y, -3x+2y)$,

(b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x,y) = (x+y+1, 2xy, -3x)$,

(c) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x], \quad L(a,b) = 2ax^2 + (a-3b)x + 4b$,

(d) $L\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2, \quad Lp(x) = (2p'(3), p(1))$,

(e) $L\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_4[x], \quad Lp(x) = \int_1^x p(y)dy + a$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$

Zad.2 Napisać wzór przekształceń L i K opisanych poniżej

(a) $L, K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L-$ symetria względem osi Oy, $K-$ symetria względem prostej $y = 3x$.

(b) $L, K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L-$ rzut prostokatny na prostą $y = x$, $K-$ rzut w kierunku wektora $(1,3)$ na prostą $y = 2x$.

(c) $L, K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L-$ symetria względem osi Oz, $K-$ symetria względem płaszczyzny $x+y+z=0$.

$(d)^*$ $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L-$ obrót wokół prostej $2x = y = -2z$ o kąt $\pi/2$.

Zad.3 Napisać wzór na przekształcenie liniowe L, jeśli wiadomo, że

(a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(1,2) = (3,2,1),\ L(2,3) = (1,-1,0)$.

(b) $L\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, \quad L(x+1) = (1,3),\ L(x^2) = (2,2),\ L(x^2-1) = (2,-1)$.

(c) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x], \quad L(1,1,1) = 2x^2 - x + 1,\ L(1,-1,0) = x,\ L(0,1,3) = x^2 - 5x - 2$.

Zad.4 * Niech $L \in \mathcal{L}(U,V)$. Oznaczmy

$$\operatorname{Ker} L = \{\vec{u}\colon L\vec{u} = \vec{0}\} \subset U, \qquad \operatorname{Im} L = \{L\vec{u}\colon \vec{u} \in U\} \subset V.$$

Uzasadnić, że

(a) $\operatorname{Ker} L$ oraz $\operatorname{Im} L$ są podprzestrzeniami liniowymi U i V.

(b) $\dim(\operatorname{Im} L) \le \dim U$.