Algebra F2 - Lista 5

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Nie korzystajac ze wzorów wyprowadzonych w zad. 1 z listy 4, znaleźć jądra i wymiary przekształceń liniowych L i K oraz podać wymiar $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$.

(a) $L, K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L-$ symetria względem osi Oy, $K-$ symetria względem prostej $y = 3x$.

(b) $L, K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L-$ rzut prostokatny na prostą $y = x$, $K-$ rzut w kierunku wektora $(1, 3)$ na prostą $y = 2x$.

(c) $L, K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L-$ symetria względem osi Oz, $K-$ symetria względem płaszczyzny $x + y + z = 0$.

Zad.2 Znaleźć jądro i obraz przekształcenia liniowego L (podać bazy i wymiary $\operatorname{Ker} L$ i $\operatorname{Im} L$).

(a) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x + y + z, -2x + 3z)$,

(b) $L\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$, $L(p) = (p'(2), p(1) + p(2), 3p(0), p'(1) + p(1))$,

(c) $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $L(x, y, z, t) = (x + y + z, x + y + t, x + z + t, y + z + t)$,

(d) $L\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, $Lp(x) = (x^3 + x)p(1) + \int_0^x p(y)dy$,

(e) $L\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}_n[x]$, $L(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$, gdzie $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Zad.3 Napisać macierze przekształceń liniowych z zadania 2.

Zad.4 Znajdując odpowiednie izomorfizmy liniowe uzasadnić izomorficzność przestrzni liniowych.

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \{p\colon \mathbb{R}_3[x]\colon p'(1) = 0, p(-1) = 0\}$, $W = \operatorname{lin}\{\sin x, \cos x\} \subset C([0, \pi])$,

(b) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \operatorname{lin}\{(1, 2, 3, -1), (0, 2, -3, 1), (2, 5, 1, -2)\}$, $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x]\colon p(-1) = 0\}$,

(c) $U = \mathbb{R}[x]$, $V = \{p \in \mathbb{R}[x]\colon p(2) = 0\}$, $W = \operatorname{lin}\{\cos nx\colon n \in \mathbb{N}\}$.

Zad.5 * Uzasadnić, że jeśli $L \in \mathcal{L}(U, V)$, to $\dim U = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$