Algebra F2 - Lista 6

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Napisać macierze przekształceń liniowych w bazach standardowych

(a) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-4z)$,

(b) $L\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4, \quad L(p) = (p'(1), p'(-1)+p(1), 2p(0)+p(1), p''(1)+p(2))$,

(c) $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x], \quad L(a,b,c,d) = (a+b-d)x^2 + (b+c)x + a + 2c + d$,

(d) $L\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x], \quad Lp(x) = p(x-1)$,

Zad.2 Znaleźć przekształcenia liniowe $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $K\colon \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}_{m-1}[x]$ o tej samej macierzy A w bazach standardowych.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zad.3 Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazach standardowych ($B_S = \{(1,0),(0,1)\}$) oraz $\vec{v} = (1,1)$.

(a) Niech $B_1 = \{(1,1),(1,-1)\}$. Obliczyć i zaznaczyć na rysunku wektor $L\vec{v}$. Napisać macierz przekształcenia L w bazach B_1 i B_S. Zastosować tę macierz do obliczenia $L\vec{v}$ (wsk.: napisać $\vec{v}$ w odpowiedniej bazie).

(b) Napisać macierz przekształcenia L w bazach B_S i B_1. Zastosować tę macierz do obliczenia $L\vec{v}$, wynik zaznaczyć na rysunku (wsk.: otrzymamy $L\vec{v}$ w bazie B_1).

(c) Niech $B_2 = \{(-1,1),(1,3)\}$. Napisać macierz przekształcenia L w bazach B_1 i B_2. Zastosować tę macierz do obliczenia $L\vec{v}$, wynik zaznaczyć na rysunku (wsk.: otrzymamy $L\vec{v}$ w bazie B_2).

Zad.4 Napisać macierz przekształcenia liniowego L w bazach B_1 i B_2

(a) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,y,z) = (x-y, 2x+y+z)$, $B_1 = \{(1,3,1),(-1,1,0),(1,1,0)\}$, $B_2 = \{(-1,2),(-2,3)\}$.

(b) $L\colon \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $Lp(x) = p(x+1) + p(1)x^2$, $B_1 = \{x+1, x-1\}$, $B_2 = \{(x+1)^2, x+2, x^2+1\}$.

Zad.5 Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazach standardowych. Znaleźć bazy B_1 i B_2 takie, aby w tych bazach L miało macierz $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad.6 Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazach standardowych. Czy istnieje baza B taka, że L w bazie B będzie miało macierz $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zad.7 Niech $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w bazach standardowych. Znaleźć bazę B taką, aby w tej bazie L miało macierz $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.