

Algebra F2 - Lista 8

WPPT, kier. fizyka, I rok.

Zad.1 Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $L: V \rightarrow V$, gdzie

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, a L jest rzutem prostopadłym na prostą $y = 2x$
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, a L jest symetrią względem płaszczyzny $x + y + 2z = 0$
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, a L jest obrotem o kąt π wokół prostej $2x = y = 3z$

Zad.2 Przekształcenie liniowe $L: V \rightarrow V$ ma n wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i n odpowiadających im wektorów własnych $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Podać przykład przekształcenia L , jeśli

- (a) $n = 2$, $V = \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\vec{v}_1 = (1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2)$
- (b) $n = 3$, $V = \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)$, $\vec{v}_3 = (-1, 3, 2)$
- (c) $n = 2$, $V = \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 0)$

Zad.3 Przekształcenie liniowe $L: V \rightarrow V$ ma wartość własną $\lambda = 0$ oraz odpowiadające jej wektory własne $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Podać przykład L , jeśli

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\vec{v}_1 = (3, 4)$. Podać bazy oraz wymiary $\text{Ker } L$ oraz $\text{Im } L$.
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = (3, 4, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$. Podać bazy oraz wymiary $\text{Ker } L$ oraz $\text{Im } L$.
- (c) $V = \mathbb{R}^4$, $\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, 1, 2, -1)$. Podać bazy oraz wymiary $\text{Ker } L$ oraz $\text{Im } L$.

Zad.4 Znaleźć wartości i wektory własne przekształceń liniowych $L: V \rightarrow V$.

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $L(x, y) = (2x + 3y, 2x + y)$.
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (3x + z, 3y, -4x - y - z)$.
- (c) $V = \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + y + 3z, 2x + 3y + z)$.
- (d) $V = \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.
- (e) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $Lp(x) = xp'(x) + p(x)$.
- (f) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $Lp(x) = x^2p'(0) + (x + 1)p(0)$.