LISTA 1

1. Zbadać, kiedy iloraz $\frac{z-1}{z+1}$ jest liczbą rzeczywistą, a kiedy czysto urojoną.

2. Wykazać, że gdy $|z| = 1$, $a \in \mathbb{C}$ i $z \neq a$, to $|\frac{z-a}{\bar{a}z-1}| = 1$.

3. Dowieść, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

   Wywnioskować stąd, że dla dowolnych $c, d \in \mathbb{C}$ mamy

$$|c + \sqrt{c^2 - d^2}| + |c - \sqrt{c^2 - d^2}| = |c + d| + |c - d|.$$

4. Niech z_1, z_2 będą liczbami zespolonymi takimi, że $|z_1| > |z_2|$. Dowieść, że dla wszystkich $n \geqslant 2$ mamy

$$n|\frac{z_2}{z_1}|^{n-1} < \frac{|z_1|}{|z_1| - |z_2|}.$$

5. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant |2z + 1|\}.$$

6. Obliczyć $(2 + 2i\sqrt{3})^9$.

7. Rozwiązać równanie $z^5 = 1$ i wywnioskować, że

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{5} + 1),$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}$$

   oraz

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

8. Wyprowadzić wzór na sumę

$$\cos\theta + \cos 3\theta + ... + \cos(2n+1)\theta.$$

   Wsk. Zauważyć, że można tę sumę zapisać jako część rzeczywistą pewnej sumy szeregu geometrycznego.

9. Wykazać, że zbiór $\{z \in \mathbb{C} : Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0\}$, gdzie $A \neq 0$ i C są liczbami rzeczywistymi, a B – liczbą zespoloną jest

   a) okręgiem, jeśli $B\bar{B} - AC \geqslant 0$ (znaleźć jego środek i promień);

   b) zbiorem pustym, gdy $B\bar{B} - AC < 0$

10. Udowodnić, że jeśli w równaniu z poprzedniego zadania mamy $A = 0$ i $B \neq 0$, to równanie to jest rówaniem linii prostej.

11. Niech c, d będą różnymi liczbami zespolonymi i niech $k > 0$. Udowodnić, że jeśli $k \neq 1$, to zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = k|z - d|\}$ jest okręgiem. Pokazać, że środek z_0 tego okręgu leży na prostej przechodzącej przez punkty c, d i że $|c - z_0||d - z_0| = r^2$. Wsk. Prosta przechodząca przez punkty c, d ma równanie: $z(t) = c + t(d - c)$, $t \in \mathbb{R}$.