LISTA 2

12. Przypomnieć dowody kryteriów d'Alemberta i Cauchy'ego zbieżności szeregów liczbowych.

13. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{3^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+i}{in^4+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i)^n}{n^n}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})i$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$, gdzie $|z|<1$.

14. Wykazać, że jeśli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$, to jest ona równa promieniowi zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

15. Znaleźć promienie zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{3^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(z-1)^n}{n!}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^n z^{3n}}{n(1-i)^n}$; **e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+a^n)z^n$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(i^n-1)}{n}(z+i)^n$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$; **h)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^n}{(n+i)^n}$.

16. Zbadać zachowanie się danego szeregu potęgowego na brzegu koła zbieżności:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{2^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\ln^2 n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\ln n}$.

17. Pokazać, że jeśli $z_n = x_n + iy_n$, gdzie $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne bezwzględnie.

18. Wykazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest zbieżny bezwzględnie.

19. Wykazać, że jeśli $\mathrm{Re} z_n \geqslant 0$ i szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ są zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest zbieżny bezwzględnie.

20. Pokazać, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie oraz szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

21. Zbadać ciągłość podanych funkcji:

a) $f(z) = \frac{\mathrm{Re} z}{1+|z|}$; **b)** $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re} z}{z} & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$;

c) $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re} z^2}{z} & \text{dla } z \neq 0 \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$.