

LISTA 3

22. Wykazać, że przekształcenie liniowe $w = az + b$, gdzie $a \neq 0$, składa się z obrotu wokół punktu 0, jednokładności o środku 0 i translacji. Wykazać, że przekształcenie liniowe przekształca proste na proste i okręgi na okręgi.
23. Wykazać, że obrazem okręgu $|z - a| = r$, gdzie $r \neq |a|$ przez inwersję (tj. odwzorowanie $w = \frac{1}{z}$) jest okrąg. Co jest w przypadku, gdy $r = |a|$? Jak wyglądają obrazy prostych w tym odwzorowaniu?
24. Wykazać, że każda homografia, tzn. przekształcenie $w = \frac{az+b}{cz+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$, jest przekształceniem różnowartościowym. Jak można ją przedłużyć do przekształcenia wzajemnie jednoznacznego płaszczyzny zespolonej domkniętej na siebie?
25. Wykazać, że każda homografia jest złożeniem przekształceń liniowych i inwersji. Co można powiedzieć o obrazach prostych i okręgów przez homografię?
26. Wykazać, że homografie tworzą grupę przekształceń płaszczyzny zespolonej domkniętej.
27. Znaleźć obraz okręgu $|z| = 1$ oraz prostej $y = x$ dla odwzorowania $w = \frac{1}{z-1}$.
28. Znaleźć obraz zbioru $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ dla odwzorowania $w = \frac{z-i}{z+i}$.
29. Napisać ogólną postać homografii, które przekształcają:
- a) punkt ∞ na ∞ ;
 - b) punkty $-1, 0, 1$ odpowiednio na $i, -i, \infty$;
 - c) trzy różne punkty $a, b, c \in \mathbb{C}$ odpowiednio na $0, 1, \infty$;
 - d) trzy różne punkty a, b, ∞ płaszczyzny zespolonej domkniętej odpowiednio na $0, 1, \infty$;
 - e) okrąg $|z| = 1$ na siebie oraz punkt 0 na punkt 0;
 - f) oś rzeczywistą na oś rzeczywistą, przy czym punkty $0, -1$ przechodzą same na siebie;
 - g) jak f) oraz górną półpłaszczyznę w górną półpłaszczyznę.
30. Niech $\alpha \in D(0, 1)$. Sprawdzić, że homografia

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

przekształca $D(0, 1)$ na siebie oraz punkt α na 0.

31. Jaka jest ogólna postać homografii, które przekształcają dysk $D(0, 1)$ na siebie? Wsk. Zad. 28e), 29.