LISTA 4

32. Wykazać, że
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n = e^z.$$
Wsk. Badać granicę modułów i argumentów.

33. Obliczyć: (w punkcie f) wziąć wartość główną $(-1)^{-i}$)

a) $\cos(-10i)$; **b)** $\sin(\frac{\pi}{2}+i)$; **c)** $\mathrm{Log}(\sqrt{3}+i)$;
d) $\mathrm{Log}(-10i)$; **e)** $(1+\sqrt{3}i)^i$; **f)** $\log[(-1)^{-i}]$.

34. Korzystając z zależności:
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
oraz z własności funkcji wykładniczej udowodnić własności funkcji trygonometrycznych:
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1;$$
$$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z \sin w; \;\; \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w;$$
$$\cos(z+2k\pi) = \cos z, \;\; \sin(z+2k\pi) = \sin z, \;\; \text{dla } \; \mathrm{k} \in \mathbb{Z};$$
$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}+k\pi, \;\; k\in\mathbb{Z}; \;\; \sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

35. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną funkcji $\cos z$ oraz $\sin z$ oraz pokazać, że istnieją liczby zespolone z takie, że $|\cos z| > 1$, $|\sin z| > 1$.

36. Pokazać, że nie dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ mamy
$$\log(zw) = \log z + \log w,$$
ale dla wszystkich $z, w \in \mathbb{C}$ mamy
$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}z + \mathrm{Log}w.$$
(suma kompleksowa)

37. Zdefiniować funkcję wieloznaczną $\mathrm{Sin}^{-1}z$ następująco:
$$w \in \mathrm{Sin}^{-1}z \Longleftrightarrow \sin w = z.$$
Pokazać, że
$$\mathrm{Sin}^{-1}z = -i\mathrm{Log}(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$
Znaleźć $\mathrm{Sin}^{-1}(1/\sqrt{2})$.

38. Zdefiniować funkcję wieloznaczną $\mathrm{Tg}^{-1}z$ następująco:
$$w \in \mathrm{Tg}^{-1}z \Longleftrightarrow \mathrm{tg}\, w = z.$$
Pokazać, że
$$\mathrm{Tg}^{-1}z = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \neq \pm i.$$
Niech $z = e^{i\theta}$, gdie $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pokazać, że
$$\mathrm{Tg}^{-1}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}(\log|\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}| + i(2n\pi + \frac{\pi}{2}))$$
i wywnioskować stąd, że
$$\mathrm{Re}(\mathrm{Tg}^{-1}(e^{i\theta})) = \{n\pi + \frac{\pi}{4} : n \in \mathbb{Z}\}.$$