Funkcje analityczne **Lista 1**

Rozważamy rzut stereograficzny z bieguna $N = (0,0,1)$ sfery $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ na płaszczyznę równika $\{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$, którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$ (lub $\mathbb{C}$). W ten sposób dostajemy odwzorowanie T ze sfery bez bieguna $S^2 \setminus N$ na płaszczyznę $\mathbb{R}^2$. Uzupełniając $\mathbb{R}^2$ o dodatkowy „punkt w nieskończoności" ∞ możemy rozszerzyć T do bijekcji pomiędzy S^2 a $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (lub $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Dokładniej, dla $(x,y,z) \in S^2$ przyjmujemy

$$T(x,y,z) = \begin{cases} (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}), & \text{gdy } z \neq 1, \\ \infty, & \text{gdy } z = 1. \end{cases}$$

---

1. $\heartsuit$ Uzasadnij, że podany wyżej wzór na T jest zgodny z interpretacją geometryczną.

2. Sprawdź, że odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \cup \infty \to S^2$ jest dane wzorem

$$T^{-1}(\infty) = (0,0,1), \qquad T^{-1}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

w szczególności T istotnie jest bijekcją.

Okręgiem w $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ nazywamy każdy okrąg z $\mathbb{R}^2$, *prostą* w $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ nazywamy każdą prostą z $\mathbb{R}^2$ uzupełnioną o punkt ∞.

Okręgi w S^2 określamy standardowo: każdy okrąg w S^2 jest przekrojem S^2 i pewnej płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $|D| < A^2 + B^2 + C^2$.

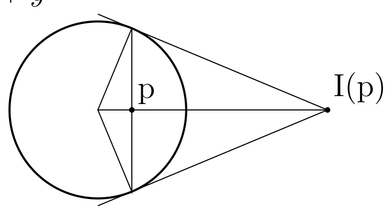
---

3. Uzasadnij, że jeśli $E \subset S^2$ jest okręgiem, to obraz $T(E)$ jest okręgiem lub prostą w $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Ponadto każdy okrąg i każda prosta z $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ jest postaci $T(E)$ dla pewnego okręgu $E \subset S^2$. Wywnioskuj stąd, że T^{-1} przekształca okręgi i proste w $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ na okręgi w S^2.

4. (Inwersja względem okręgu jednostkowego) Rozważmy następujące odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ w siebie

$$I(\infty) = (0,0), \qquad I(0,0) = \infty, \qquad I(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}), \quad \text{dla } (x,y) \neq (0,0).$$

Sprawdź, że $I(I(p)) = p$ (skąd I jest bijekcją $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$); $\|I(x,y)\| \cdot \|(x,y)\| = 1$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Uzasadnij poprawność konstrukcji $I(p)$ przedstawionej na rysunku.



5. Jakiemu odzworowaniu sfery S^2 odpowiada inwersja z poprzedniego zadania? Dokładniej, chodzi o zidentyfikowanie odwzorowania $T^{-1} \circ I \circ T : S^2 \to S^2$.

6. Wywnioskuj z wyniku poprzedniego zadania, że inwersja (na $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$) zachowuje rodzinę okręgów i prostych, tzn. przekształca każdy okrąg na okrąg lub prostą i przekształca każdą prostą na okrąg lub prostą.

Na S^2 rozważamy standardową metrykę euklidesową i przenosimy ją za pomocą T na $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (lub $\hat{\mathbb{C}}$). Dokładniej, niech

$$d(a,b) := \|T^{-1}(a) - T^{-1}(b)\|, \qquad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

7. Sprawdź, że dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\sqrt{|z_2|^2+1}}, \qquad d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z_1|^2+1}}.$$

8. Odwzorowanie T jest izometrią z S^2 na $(\hat{\mathbb{C}}, d)$. Przestrzeń metryczna $(\hat{\mathbb{C}}, d)$ jest zwarta.

9. Metryka d obcięta do $\mathbb{C}$ generuje taką samą topologię jak metryka euklidesowa. Równoważnie, dla każdego ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ zachodzi $(d(z_n, g) \to 0 \iff \|z_n - g\| \to 0)$. Ponadto $d(z_n, \infty) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n| \to \infty$.

Homografią nazywamy odwzorowanie $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ postaci $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ oraz $ad - bc \neq 0$. Przyjmujemy przy tym, że $f(\infty) = a/c$ i $f(-d/c) = \infty$, gdy $c \neq 0$; $f(\infty) = \infty$, gdy $c = 0$.

---

10. Każda homografia jest złożeniem odwzorowań postaci $g(z) = 1/z$ oraz $h(z) = Az + B$.

11. Homografie są ciągłe (jako przekształcenia $(\hat{\mathbb{C}}, d)$). Odzworowanie odwrotne do homografii istnieje i też jest homografią. Zbiór wszystkich homografii jest grupą przekształceń $\hat{\mathbb{C}}$.

12. Homografie zachowują rodzinę okręgów i prostych. *Wsk.* Zadania 6 i 10.

---

13. Wykaż, że funkcje Re, Im, $|\cdot|$, $z \mapsto \overline{z}$ są ciągłe na $\mathbb{C}$.

14. ♡ Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) (co oznacza, że ciągłe i różniczkowalne są funkcje $\operatorname{Re} f$ oraz $\operatorname{Im} f$; $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$). Udowodnij, że

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{t \in (a,b)} |f'(t)|.$$

(Wsk. wystarczy rozważyć przypadek, gdy $f(b) - f(a)$ jest rzeczywiste – dlaczego?) Pokaż na przykładzie, że na ogół nie istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Porównaj z twierdzeniem Lagrange'a.

15. Znajdź część rzeczywistą, urojoną i moduł liczby $\frac{1+2i}{3+4i}$.

16. Zbadaj zbieżność szeregów

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + 2}{n^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i\,, \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}, \text{ gdzie } |z| < 1.$$

17. Znajdź wszystkie $z \in \mathbb{C}$, dla których zbieżny jest szereg

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n z^n}{n!}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n^2}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

18. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ są bezwzględnie zbieżne.

19. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest też bezwzględnie zbieżny.

20. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n}$ jest też bezwzględnie zbieżny.