Funkcje analityczne — Lista 2

Funkcję *wykładniczą* exp określamy następująco

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definicja ta jest poprawna, tj. powyższy szereg potęgowy jest zbieżny na $\mathbb{C}$. Następnie definiujemy funkcje *trygonometryczne* wzorami

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na wykładzie udowodnimy, że $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ dla dowolnych z, $w \in \mathbb{C}$. Następne zadania należy rozwiązać korzystając (tylko) z tego wzoru, z definicji funkcji exp, cos, sin i poprzednich zadań.

21. Zauważ, że funkcje exp, sin i cos są holomorficzne na $\mathbb{C}$ i oblicz ich pochodne.
22. ♡ Obcięcie funkcji exp do $\mathbb{R}$ jest funkcją dodatnią i ściśle rosnącą.
23. ♡ Korzystając ze wzoru $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ wyprowadź wzór na $\cos(z + w)$ oraz $\sin(z + w)$. Uzasadnij, że $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
24. ♡ Uzasadnij, że obcięcia funkcji sin i cos do $\mathbb{R}$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych. Sprawdź, że $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 0$ i wywnioskuj stąd, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia t_0, dla której $\cos t_0 = 0$. **Definicja:** $\pi = 2t_0$.
25. ♡ Uzasadnij, że funkcje sin i cos są monotoniczne i dodatnie na $(0, \pi/2)$. Oblicz ich wartości w punktach 0, $\pi/2$, π, 2π. Uzasadnij, że funkcje sin i cos są 2π-okresowe, a funkcja exp jest $2\pi i$-okresowa.
26. Odwzorowanie $t \mapsto \exp(it)$ przekształca $\mathbb{R}$ *na* okrąg jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
27. $\exp(z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z/(2\pi i) \in \mathbb{Z}$.
28. Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ mamy $\exp(z) \neq 0$. Jeśli $w \in \mathbb{C}$ i $w \neq 0$, to $w = \exp(z)$ dla pewnej liczby $z \in \mathbb{C}$.
29. (Postać trygonometryczna liczb zespolonych) Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ istnieje liczba $t \in [0, 2\pi)$ taka, że

    $$z = |z|\exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t).$$

    Dla liczb $z \neq 0$ liczba t jest wyznaczona jednoznacznie, nazywamy ją *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $t = \operatorname{Arg} z$.
30. Oblicz $\cos i$, $\sin i$, $\cos(i + \pi/2)$; ♡ oblicz wartości funkcji sin i cos w punktach $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/4$.

---

31. Zbadaj zbieżność ciągów

    $$a_n = \frac{e^{in}}{n}, \quad b_n = \frac{2^n}{n^2} + \frac{i\cos n\pi}{n^3}, \quad c_n = \exp(-\frac{i}{n^2+1}), \quad d_n = z^n, \quad f_n = \frac{in + n^2}{n^2 - i}.$$

    Wsk. $|d_{n+1} - d_n| = \ldots$.

32. Oblicz sumy szeregów

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^{2n}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{2^n}.$$

33. Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, to jest ona równa promieniowi zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$.

34. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n(z-2)^n, \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}, \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n,$$

$$\text{(f)} \sum_{n=0}^{8} n!z^n, \quad \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}, \quad \text{(h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\ln^2 n}, \quad \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}.$$

35. Zbadaj zachowanie szeregów z zadania 34(a), (b), (g), (h), (i) na brzegach ich kół zbieżności.

36. Rozwiń w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ funkcję f, gdzie

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{1-iz} \text{ oraz } p=0, \quad \text{(b) } f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=i, \quad \text{(c) } f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=2.$$

Jakie są promienie zbieżności otrzymanych szeregów?

37. Uzasadnij, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3}$ jest zbieżny jednostajnie na $\overline{D(0,1)}$.

---

38. Sprawdź, czy funkcje (a) $f(z) = \sin z$, (b) $f(z) = \overline{z}$ spełniają równania Cauchy-Riemanna.

39. Oblicz pochodne (wszędzie tam gdzie istnieją) funkcji: (a) $f(z) = \overline{z}^2 - z$, (b) $f(z) = |z|^2$, (c) $f(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$; (d) $f(z) = \exp(\frac{1}{\sin z})$.

40. Jeśli $f \in C^2(\Omega)$ (jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych) oraz $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}$.

41. Funkcję f nazywamy harmoniczną na zbiorze Ω, jeśli $\Delta f = 0$ na Ω. Wykaż, że funkcja holomorficzna na Ω, a także jej części rzeczywista i urojona są harmoniczne na Ω.

42. ♡ Wyraź $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$ oraz $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ przez $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

43. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest obszarem (tj. zbiorem otwartym i spójnym), $f \in H(\Omega)$ i jedna z dwóch funkcji $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ jest stała na Ω, to f jest funkcją stałą.

44. ♡ Jeśli $f \in H(\Omega)$, to $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest holomorficzna na $\overline{\Omega} = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$.