Funkcje analityczne Lista 3

Przypomnienie: Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych rozłącznych zbiorów otwartych $G_1, G_2 \subset X$ takich, że $A \subset G_1 \cup G_2$ zachodzi $A \cap G_1 = \emptyset$ lub $A \cap G_2 = \emptyset$. Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $G \subset Y$ zbiór $f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$ jest otwarty w X.

45. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest zbiorem spójnym.

46. ♡ Zbiór otwarty $G \subset \mathbb{C}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną zawartą w G. *Wsk. Niech $x_0 \in G$ i niech E będzie zbiorem punktów G, które można połączyć z punktem x_0 łamaną zawartą w G. Pokazać, że E oraz $G \setminus E$ są otwarte.*

---

47. Jeśli $F \in H(\Omega)$ i $f = F' \in C(\Omega)$, a γ jest drogą w Ω o początku w a i końcu w b, to
$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a).$$

48. Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f' = 0$ na Ω, to f jest stała na każdej składowej spójności zbioru Ω.

49. Jeśli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, a f zespoloną funkcją ciągłą na γ^*, przy czym $M = \sup_{\gamma^*} |f|$, to
$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \le M\ell(\gamma), \qquad \text{gdzie } \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

50. Oblicz $\int_\gamma ze^{iz}\, dz$, gdzie $\gamma(t) = 2e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$.

51. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Oblicz całkę $\int_\gamma (z-a)^n\, dz$, jeśli γ
   (a) jest półokręgiem $|z - a| = r$, $0 \le \arg(z - a) \le \pi$ o początku w $a + r$;
   (b) jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu r;
   (c) jest brzegiem kwadratu o środku w a i bokach równoległych do osi układu współrzędnych ($n \ne -1$).

52. Oblicz całkę $\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4}$, gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 1 i promieniu 2. *Wskazówka*: rozkład na ułamki proste.

53. Niech f będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{C}$. Oblicz
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - a}\, dz,$$
gdzie γ_ε jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu ε.

54. Sformułuj i udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki wzdłuż drogi.

55. Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ będą drogami zamkniętymi, niech $w \in \mathbb{C}$ oraz
$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |w - \gamma_2(t)|, \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

(a) Pokaż, że wzór $\gamma(t) = \dfrac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_2(t) - w}$ określa drogę zamkniętą w $\mathbb{C}$.

(b) Sprawdź, że $|1 - \gamma(t)| < 1$ i wywnioskuj stąd, ile równa się $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

(c) Obliczając z definicji $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ wywnioskuj, że $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(w)$.

56. (Funkcje holomorficzne o niezerowej pochodnej zachowują kąty) Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \Omega$ będą drogami klasy C^1, niech $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\Omega)$ ma niezerową pochodną na Ω, to $f \circ \gamma_k$ są drogami w Ω. Ponadto jeśli $\gamma_1'(t_0) \neq 0$ i $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, to kąt pomiędzy drogami γ_1^* i γ_2^* w punkcie $\gamma_1(t_0)$ jest taki sam, jak pomiędzy drogami $(f \circ \gamma_1)^*$ i $(f \circ \gamma_2)^*$ w punkcie $f \circ \gamma_1(t_0)$. *Wskazówka.* Znaleźć wektory styczne do tych dróg.

---

57. Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0, \mathrm{Im}\, z = 0\}$. Dla $z \in \Omega$ określamy funkcję Log następująco
$$\mathrm{Log}\, z = \int_{\langle 1, z\rangle} \frac{dw}{w}.$$
Sprawdź, że $\mathrm{Log} \in H(\Omega)$ i oblicz pochodną Log'. Uzasadnij, że $\exp(\mathrm{Log}\, z) = z$, obliczając pochodną funkcji $g(z) = \exp(\mathrm{Log}\, z)/z$. Oblicz $\mathrm{Log}(1+i)$, $\mathrm{Log}(\exp(3\pi i/2))$. Czy $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$?
Uwaga: Liczbę $\mathrm{Log}\, z$ nazywamy *logarytmem głównym* z.

58. Oblicz całki
$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z\, dz}{(1+z^2)\sin z}, \quad \int_\gamma \frac{\sin(z-2)\, dz}{z-2},$$
gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w $2+i$ i promieniu $\sqrt{2}$.

59. Niech $p, z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{p\})$. Niech $C(z,r)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w z i promieniu r. Uzasadnij, że $\int_{C(p,r)} f(z)\, dz$ nie zależy od r, oraz że
$$\int_{C(z_0,r)} f(z)\, dz = \mathrm{Ind}_{C(z_0,r)}(p) \cdot \int_{C(p,r)} f(z)\, dz, \quad \text{dla } r \neq |z_0 - p|.$$

60. Obliczając $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ dla (odpowiednio sparametryzowanej) drogi zamkniętej γ, której obraz jest elipsą $\frac{(\mathrm{Re}\, z)^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{Im}\, z)^2}{b^2} = 1$, uzasadnij, że
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

61. (*Lemat Jordana*) Niech $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \mathrm{Im}\, z \geq \alpha\}$, $f \in C(D)$ oraz $f(z) \to 0$, gdy $|z| \to \infty$. Wówczas
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} e^{i\beta z} f(z)\, dz = 0,$$
gdzie γ_r jest tą częścią okręgu o środku w 0 i promieniu r, która znajduje się w D.

62. Oblicz całki
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2i)}\, dz; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z-2i)^3}\, dz,$$
gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem (a) o środku w $3i$ i promieniu 2; (b) o środku w $-2i$ i promieniu 3.