Funkcje analityczne Lista 4

63. Uzasadnij, że dla $\xi \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór
$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$
Wskazówka. Można całkować $f(z) = e^{i\xi z - z^2}$ po brzegu prostokąta o wierzchołkach w punktach $\pm R$, $\pm R + ai$ dla odpowiednio dobranego a, następnie wziąć $R \to \infty$.

64. Jeśli $f_n \in H(\Omega)$ jest ciągiem funkcji zbieżnym do funkcji f jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze zbioru Ω, to $f \in H(\Omega)$.

65. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, $f \in C([a, b] \times \Omega)$ oraz $f(t, \cdot) \in H(\Omega)$ dla każdego $t \in [a, b]$, to funkcja $g(z) = \int_a^b f(t, z)\, dt$ jest holomorficzna na Ω. *Wskazówka*: Twierdzenie Morery.

66. Uzasadnij, że podane funkcje są holomorficzne
$$f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{tz}}{1 + t^2}\, dt \quad \text{na } \mathbb{C}; \qquad g(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + tz}\, dt \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z > 0\};$$
$$h(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tz}}{1 + t^2}\, dt \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

67. Jeśli $f \in H(D(a, r))$ dla pewnego r, to a jest m–krotnym zerem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(m)}(a) = 0$ oraz $f^{(k)}(a) = 0$ dla $0 \le k < m$.

68. Znajdź krotność zera $z = 0$ dla funkcji
$$f_1(z) = (e^{z^2} - 1)z^2; \quad f_2(z) = 2\cos z^2 + z^4 - 2; \quad f_3(z) = e^{\sin z} - 1; \quad f_4(z) = \sin^{2014}(z^{100}).$$

69. Czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu 0 i taka, że (a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$; (b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ dla $n \in \mathbb{N}$?

70. Funkcja $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$ ma ciąg zer zbieżny do 1, ale nie jest stała. Czy to nie sprzeczność z twierdzeniem o zerach?

71. Zbadaj, czy funkcja f ma funkcję pierwotną na Ω, jeśli

    (a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}, \quad \Omega = D(0, 1);$

    (b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)};$

    (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$

72. Określ rodzaj osobliwości funkcji $f(z) = \dfrac{z - \pi i}{1 + e^z}, \quad g(z) = \exp \dfrac{1}{z - 1}.$

73. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i f nie jest stała, to $f(\mathbb{C})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$. *Wskazówka.* Twierdzenie Liouville'a.

74. Jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i jej część rzeczywista lub urojona jest funkcją ograniczoną z dołu lub z góry, to f jest stała. *Wskazówka do jednego z przypadków.* Twierdzenie Liouville'a dla funkcji e^f.

75. Niech $f, g \in H(\mathbb{C})$ spełniają nierówność $|f(z)| \leq |g(z)|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Co można wywnioskować stąd o funkcjach f i g?

76. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i $f \in H(\Omega)$. Przypuśćmy, że funkcja f jest różna od stałej, i że $|f|$ ma minimum lokalne w punkcie $z_0 \in \Omega$. Co można powiedzieć o wartości funkcji f w punkcie z_0?

77. Jeśli funkcja $f \in H(\Omega)$ ma zero krotności m w punkcie a, to funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ma w punkcie a biegun rzędu m.

78. Jeśli funkcje $f, g \in H(\Omega)$ mają zera krotności, odpowiednio, m i n w punkcie a, to funkcja $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ ma w punkcie a:

    - biegun rzędu $n - m$, gdy $m < n$;
    - osobliwość usuwalną w punkcie a, gdy $m \geq n$. Ponadto rozszerzenie holomorficzne h na otoczenie a ma w punkcie a zero krotności $m - n$.

79. Jeśli f ma biegun rzędu 1 w punkcie a, to

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} f(z)(z - a).$$

Ogólniej, jeśli f ma biegun rzędu co najwyżej m w punkcie a, to

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!},$$

gdzie $g(z) = (z - a)^m f(z)$.

80. Oblicz residua we wszystkich biegunach dla funkcji

$$f_1(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad f_2(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}; \quad f_3(z) = \frac{\sin 2z}{(1+z)^3}; \quad f_4(z) = \operatorname{tg} z.$$

81. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całki

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + a}{e^{it} - a}\, dt, \quad \text{dla } |a| \neq 1;$$

$$\text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{1 + x^4}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{4} |\operatorname{Im} a|, \quad \text{gdzie } a^4 + 6a^2 + 13 = 0;$$

$$\text{(c)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{2 - \cos t} = 2\pi(2 - \sqrt{3}); \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \varepsilon \cos t)^2} = 2\pi(1 - \varepsilon^2)^{-3/2}, \quad \text{dla } |\varepsilon| < 1;$$

$$\text{(d)} \int_0^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4e}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^3} = \frac{7\pi}{8e}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}\, dx}{1 + x^2} = \pi e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R};$$

$$\text{(e)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{e^x + 1} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \quad \text{gdzie } 0 < a < 1.$$

Wskazówka do (e): całkować po brzegu prostokąta o wierzchołkach w $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$.

82. Całkując $e^z z^{-n-1}$ wzdłuż okręgu jednostkowego, sprawdź, że

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt - \sin t)\, dt = \frac{2\pi}{n!}, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(nt - \sin t)\, dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

83. Uzasadnij, że jeśli $f \in C(D'(a,R))$ spełnia $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = A$, to
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = iA(\beta-\alpha),$$
gdzie $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ dla $t \in [\alpha, \beta]$.

84. Całkując funkcję $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ po konturze złożonym z odcinków $\langle -R, -r\rangle$ i $\langle r, R\rangle$ oraz półokręgów o środku w 0 i promieniach r, R uzasadnij, że
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$
Uwaga: tutaj wystarczy twierdzenie Cauchy'ego.

85. Ile pierwiastków ma w Ω równanie $f(z) = 0$, jeśli

   (a) $f(z) = z^4 + 3z + 1$, $\Omega = D(0,1)$ (*wsk.* tw. Rouché dla $g(z) = 3z$);
   (b) $f(z) = z^4 + 3z + 1$, $\Omega = A(0,1,2)$,
   (c) $f(z) = \sin z - z$, $\Omega = D(0,1)$ (*wsk.* rozwinięcie sin w szereg potęgowy).

86. ♡ Przypomnij (z wykładu z Analizy Matematycznej) definicję całki krzywoliniowej zorientowanej w $\mathbb{R}^2$ oraz twierdzenie Greena. Udowodnij twierdzenie Cauchy'ego:
$$f \in H(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ – gwiaździsty, } \gamma \text{ – droga zamknięta w } \Omega \implies \int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$
używając twierdzenia Greena i równań Cauchy–Riemanna; sformułuj potrzebne założenia (mogą być inne niż w twierdzeniu Cauchy'ego na wykładzie).

87. Niech $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, $\gamma(t) = a + re^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Załóżmy, że $f \neq 0$ na γ^*. Jak wiemy, dla $p = 0$, całka
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)z^p}{f(z)}\,dz$$
jest równa liczbie zer funkcji f w $D(a,r)$, licząc wraz krotnościami. Jaka jest wartość tej całki dla $p = 1, 2, \ldots$? A jaka jest wartość gdy zastąpimy z^p przez $g(z)$, gdzie $g \in H(\Omega)$?

---

88. Napisz ogólną postać homografii, które przekształcają

   (a) punkty $-1, 0, 1$ odpowiednio na $i, -i, \infty$;
   (b) punkt ∞ na ∞;
   (c) trzy różne punkty $a, b, c \in \mathbb{C}$ na, odpowiednio, punkty $0, 1, \infty$;
   (d) trzy różne punkty $a, b, \infty \in S^2$ na, odpowiednio, punkty $0, 1, \infty$;
   (e) ♡ okrąg $\partial D(0,1)$ na siebie oraz punkt 0 na punkt 0.

89. Niech $\alpha \in D(0,1)$. Sprawdź, że homografia
$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$
przekształca $D(0,1)$ na siebie oraz punkt α na 0.

90. ♡ Jaka jest ogólna postać homografii, które przekształcają dysk $D(0,1)$ na siebie? *Wskazówka.* Zadania 11, 88(e), 89.

91. ♡ Znajdź homografię przekształcającą dysk $D(0,1)$ na półpłaszczyznę $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ oraz punkt 0 na punkt i.