# Funkcje analityczne **Lista 6**

Na wykładzie udowodnimy, że

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3}$$

---

97. Korzystając z (1), wyraź za pomocą funkcji elementarnych

$$\text{(a)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{n^2}), \quad \text{(b)} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^4}{n^4}), \quad \text{(c)} \heartsuit \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^4}{n^4}).$$

98. Uzasadnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2} = \frac{\pi \cosh(\pi z)}{2z \sinh(\pi z)} - \frac{1}{2z^2}.$$

Dla jakich $z$ zachodzi ta równość? *Wsk. wzór* (2).

99. Oblicz $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

100. Niech $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, gdzie $(f_n)$ jest ciągiem Fibonacciego określonym wzorami

$$f_0 = f_1 = 1,$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots.$$

(a) Sprawdź, że szereg określający $F$ ma dodatni promień zbieżności.

(b) Uzasadnij, że $z^2F(z) + zF(z) = F(z) - 1$, czyli $F(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$.

(c) Z ogólnej teorii wiemy, że $f_n = \operatorname{res}\left(\dfrac{1}{z^{n+1}(1 - z - z^2)}; 0\right)$. Oblicz to residuum obliczając residua w pozostałych biegunach oraz granicę

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^{n+1}(1 - z - z^2)},$$

gdzie $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Uwaga. Zwykle używaliśmy twierdzenia o residuach do obliczania całek. Tutaj postępujemy odwrotnie: obliczamy bezpośrednio całkę i z twierdzenia o residuach dostajemy residuum.

101. Oblicz

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2 + 1)} = \pi(1 - 1/e).$$

Uwaga na osobliwość (pozorną) w 0.