Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 1**

Niech $\mathcal{M}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X.

Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą*, lub *miarą dodatnią*, jeśli jest σ-addytywna oraz $\mu(\emptyset) = 0$.

Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ nazywamy *miarą zespoloną*, jeśli jest σ-addytywna.

Zwróćmy uwagę, że nie każda miara dodatnia jest miarą zespoloną, bo $[0, \infty]$ nie jest podzbiorem $\mathbb{C}$.

Dla miary zespolonej μ określamy jej *wariację* (*miarę wariacji*) $|\mu|$ wzorem

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \qquad E \in \mathcal{M},$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich *rozkładach* $\{E_i\}$ zbioru E, tj. po przeliczalnych rodzinach $\{E_i\}$ zbiorów z $\mathcal{M}$, które są parami rozłączne oraz spełniają $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$.

---

1. Sprawdź, że jeśli μ jest miarą zespoloną, to $\mu(\emptyset) = 0$ oraz $|\mu|(\emptyset) = 0$.

2. Udowodnij, że każda miara zespolona μ jest postaci $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, gdzie μ_j są skończonymi miarami (dodatnimi). Czy to przedstawienie jest jednoznaczne?

3. Podaj przykład miar zespolonych μ_1, μ_2, określonych na tym samym σ-ciele podzbiorów zbioru X i takich, że $|\operatorname{Re}\mu_1|(X) = |\operatorname{Im}\mu_1|(X) = |\operatorname{Re}\mu_2|(X) = |\operatorname{Im}\mu_2|(X)$, ale $|\mu_1|(X) \neq |\mu_2|(X)$. *Wskazówka*: za X można wziąć zbiór dwuelementowy.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ istnieje podzbiór S zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ taki, że
$$\Big| \sum_{j \in S} z_j \Big| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \ .$$

5. Udowodnij, że miara zespolona μ na X ma skończone wahanie całkowite: $|\mu|(X) < \infty$. *Wskazówka*: Jeżeli $|\mu|(E) = \infty$ to istnieje rozbicie E na A i B takie, że $|\mu(A)| > 1$ i $|\mu|(B) = \infty$.

6. Udowodnij, że jeżeli $f \in L^1(X, \mu_0)$, to $\mu(E) = \int_E f(x)\mu_0(dx)$ jest miarą zespoloną. Opisz składniki rozkładu $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ i podaj dystrybuantę miary μ, gdy $(X, \mu_0) = (\mathbb{R}, dx)$.

7. Czy $(|x|^p \wedge 1) - 1$ jest dystrybuantą miary zespolonej na $\mathbb{R}$?

0. Jeśli $A_n \in \mathcal{M}$ jest monotonicznym ciągiem zbiorów, a μ miarą zespoloną na $\mathcal{M}$, to $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.

8. Zbiór miar zespolonych na $(X, \mathcal{M})$ z normą $||\mu|| = |\mu|(X)$ jest przestrzenią Banacha. *Wskazówka*: Rozważyć *szereg* miar bezwzględnie zbieżny.

9. Pokaż, że istnieją malejące zbiory $E_i \subset \mathbb{R}$ takie, że $\bigcap E_i = \{x\}$, ale E_i nie zbiegają dobrze do x.

10. Oblicz pochodną $D\mu$ dla miary $\mu(E) = \int_E \sqrt[3]{1/x}\, dx$ na prostej.

11. Istnieje ciągła monotoniczna funkcja f na $\mathbb{R}$, która nie jest stała, ale $f' = 0$ *p.w.* [*Rudin*, przykład 8.20(b)]