

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ oznaczamy przez T_f jej *funkcję wahanía całkowitego*, określoną wzorem

$$T_f(x) = \sup \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich N i wszystkich $-\infty < x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$. Mówimy, że f ma *wahanie ograniczone*, jeśli T_f jest funkcją ograniczoną; piszemy $f \in BV$ oraz $V_f(\mathbb{R}) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_f(x)$.

Jeśli $f \in BV$ jest lewostronnie ciągła w każdym punkcie \mathbb{R} oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, to piszemy $f \in NBV$.

Dla funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ określamy podobnie $T_f^a(x)$ dla $x \in [a, b]$, tym samym wzorem co wyżej, ale tym razem supremum bierzemy po $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$. Jeśli T_f^a jest ograniczona na $[a, b]$, to piszemy $f \in BV([a, b])$ oraz $V_f([a, b]) = T_f^a(b)$.

Przez $AC([a, b])$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji *absolutnie ciągłych* na $[a, b]$, tj. takich, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b] : \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^n |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon,$$

przy czym przedziały (α_j, β_j) powyżej są parami rozłączne.

24. Jeżeli $f(x) = \mu((-\infty, x))$ dla pewnej miary zespolonej μ , to f jest ciągła w tych i tylko tych punktach x , dla których $\mu(\{x\}) = 0$.
25. Funkcje monotoniczne na \mathbb{R} mają wszędzie granice lewo i prawostronne, a zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny.
26. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Jeżeli $x < y$ i $T_f(y) < \infty$, to $|f(y) - f(x)| \leq |T_f(y) - T_f(x)|$.
27. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różnicą dwóch funkcji monotonicznych wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{[a,b]} \in BV([a, b])$ dla dowolnych $-\infty < a < b < \infty$.
28. Jeżeli $f \in NBV$, to $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in NBV$.
29. Jeżeli $f, g \in BV$, to $fg \in BV$.
30. Udowodnij, że dla $a, b > 0$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & \text{dla } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

ma wahanie ograniczone na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy gdy $a > b$.

31. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $c \in (a, b)$. Udowodnij, że $f \in BV([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in BV([a, c])$ i $f \in BV([c, b])$. Ponadto, jeżeli $f \in BV([a, b])$, to $V_f([a, b]) = V_f([a, c]) + V_f([c, b])$ dla dowolnych $a < c < b$.
32. Udowodnij, że obcięcie funkcji absolutnie ciągłej do przedziału ograniczonego jest funkcją o wahaníu ograniczonym na tym przedziale. Podaj przykład funkcji f , która jest absolutnie ciągła, ale $f \notin BV$ (na \mathbb{R}).
33. Jeśli $f, g \in AC([a, b])$, to $fg \in AC([a, b])$ oraz $\int_a^b f'g dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg' dx$.

34. Sprawdź, że $BV(\mathbb{R})$, $BV([a, b])$ oraz $AC(\mathbb{R})$ i $AC([a, b])$ (zdefiniowane w naturalny sposób) są przestrzeniami liniowymi.
35. Sprawdź, że $V_f(\mathbb{R})$ jest normą na NBV. Czy jest to też norma na BV?
36. Jeśli $f \in AC(\mathbb{R})$, to $V_f(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)| dx$ (każde z tych wyrażen może być ∞).
37. Przestrzeń $AC([a, b])$ z normą

$$\|f\| = \int_a^b (|f(x)| + |f'(x)|) dx$$

jest przestrzenią Banacha.

38. Wiemy, że jeśli μ jest dodatnią miarą borelowską na \mathbb{R} , skończoną na zbiorach zwartych, to

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \supset E \text{ i } G \text{ jest otwarty}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ i } K \text{ jest zwarty}\}.$$

Udowodnij, że jeśli μ_j ($j = 1, 2$) są miarami zespolonymi na \mathbb{R} i zbiór E jest borelowski, to istnieje ciąg zbiorów otwartych $G_n \supset E$ takich, że $\mu_j(G_n) \rightarrow \mu_j(E)$ przy $n \rightarrow \infty$.

39. (a) Znajdź $f \in NBV$ i stałą c takie, że $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{sgn} x + c$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$.
 (b) Podaj rozkład f na część osobliwą i absolutnie ciągłą.
 (c) Podaj rozkład miary μ odpowiadającej funkcji f na część osobliwą i absolutnie ciągłą; jaka jest gęstość części absolutnie ciągłej?
40. Przedstaw funkcję $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ jako różnicę dwóch funkcji rosnących należących do przestrzeni NBV; rozwiązanie może być na rysunku.
41. Niech $f \in AC([a, b])$ i $g(x) = |f(x)|^p$ dla $p > 1$. Sprawdź, że pochodna $g'(x)$ istnieje w prawie każdym punkcie $x \in [a, b]$ i oblicz ją. Czy można tu korzystać z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej?