

47. Udowodnij następujące własności wymiaru Hausdorffa:

- (a) jeśli  $E \subset F$ , to  $\dim_H E \leq \dim_H F$ ;
- (b)  $\dim_H(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H E_n$ ;
- (c) jeśli  $E$  jest przeliczalny, to  $\dim_H E = 0$ ;
- (d) jeśli  $G \subset \mathbb{R}^d$  jest otwarty i niepusty, to  $\dim_H G = d$ .

48. Wyznacz wymiar Hausdorffa sfery jednostkowej w  $\mathbb{R}^3$ .

49. Wyznacz wymiar Hausdorffa zbioru Cantora.

50. Niech  $F$  będzie zbiorem liczb z przedziału  $[0, 1]$ , których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 5. Wyznacz  $\dim_H(F)$ .

51. Wyznacz wymiar Hausdorffa krzywej  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x < 1\}$ .

52. Skonstruuuj zbiór o wymiarze Hausdorffa równym  $\frac{1}{2}$ .

53. Czy z faktu, że  $\dim_H(E) = 0$  wynika, że  $E$  jest przeliczalny?

54. Udowodnij, że jeżeli  $f : [0, 1] \rightarrow X$  jest krzywą ciągłą w  $X$  oraz  $0 \leq a < b \leq 1$ , to  $\mu^{(1)}(f[a, b]) \geq \rho(f(a), f(b))$ .

55. (Krzywa Kocha). Rozważamy następujące cztery podobieństwa  $\mathbb{C}$  o skali  $\frac{1}{3}$ :

$$S_1(z) = \frac{1}{3}z, \quad S_2(z) = \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{3}i}z + \frac{1}{3}, \quad S_3(z) = \frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{3}i}z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad S_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3},$$

oraz ciąg krzywych  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  określony rekurencyjnie:  $f_0(t) = t$  dla  $t \in [0, 1]$  oraz

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} S_1 \circ f_n(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ S_2 \circ f_n(4t - 1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], \\ S_3 \circ f_n(4t - 2), & t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}], \\ S_4 \circ f_n(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

(a) Narysuj kilka początkowych obrazów  $f_n([0, 1])$ .

Sprawdź prawdziwość następujących stwierdzeń (*uświadcówka*: wiele z nich można łatwo udowodnić indukcyjnie).

- (b)  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(1) = 1$ .
- (c) Definicja  $f_{n+1}$  jest poprawna (tzn. jednoznaczna w punktach  $1/4$ ,  $2/4$  i  $3/4$ ) oraz funkcje  $f_n$  są ciągłe.
- (d) Jeśli  $f_n(t) = f_{n+1}(t)$  dla pewnych  $t$  i  $n$ , to  $f_m(t) = f_n(t)$  dla wszystkich  $m \geq n$ .
- (e)  $f_m(\frac{k}{4^n}) = f_n(\frac{k}{4^n})$  dla  $m \geq n$  oraz  $k = 0, 1, \dots, 4^n$ .
- (f)  $\|f_n - f_{n+1}\|_{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{3^n}$  lub  $\|f_n - f_{n+1}\|_{\infty} \leq \frac{c}{3^n}$  (do wyboru).
- (g) Istnieje  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  oraz  $f$  jest ciągła na  $[0, 1]$ .
- (h) Funkcja  $f$  jest różnowartościowa.
- (i) Funkcja  $f$  jest homeomorfizmem pomiędzy  $[0, 1]$  a  $f([0, 1])$ .

Uwaga:  $f$  powyżej nazywamy *krzywą Kocha*. Jak później zobaczymy,  $\dim_H(f([0, 1])) = \log_3 4$ , tak więc z części (i) wynika, że wymiar Hausdorffa nie jest własnością topologiczną (tzn. nie jest zachowywany przez homeomorfizmy).